Estática

José Manuel Arroyo Andrade

Editorial
Universidad de Antioquia

Formación / Ingeniería

Estática

Estática

José Manuel Arroyo Andrade

Editorial
Universidad de Antioquia

Formación / Ingeniería

Colección *Formación / Ingeniería*
© José Manuel Arroyo Andrade
© Editorial Universidad de Antioquia
ISBN: 978-958-501-178-6
ISBNe: 978-958-501-176-2
DOI: doi.org/10.17533/udea.978-958-501-176-2

Primera edición: febrero del 2024

Hecho en Colombia / Made in Colombia
Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de la Editorial Universidad de Antioquia

Editorial Universidad de Antioquia
(+57) 604 219 50 10
editorial@udea.edu.co
http://editorial.udea.edu.co
Apartado 1226. Medellín, Colombia

Imprenta Universidad de Antioquia
(+57) 604 219 53 30
imprenta@udea.edu.co

A mi esposa, Etilvia Felicia,
a mis hijos, Érika Patricia, José David,
Karen Dayana y Saulo Isaí,
y a mis nietos, Nataly y Martín

Contenido

Presentación ..... **xv**

Capítulo 1
Conceptos generales **1**
Objetivos del capítulo 1
1.1 Definiciones de la mecánica 1
1.2 Breve reseña histórica 2
1.3 Concepto de partícula y cuerpo rígido 3
1.4 Leyes de Newton 4
1.5 Sistemas de unidades 4
1.6 Cálculos numéricos y cifras significativas 7
1.7 Procedimiento para la solución de problemas 8

Capítulo 2
Equilibrio de la partícula **9**
Objetivos del capítulo 9
2.1 Introducción 9
2.2 Generalidades sobre las fuerzas 10
2.3 Cantidades escalares y vectoriales 11
2.4 Operaciones entre escalares y vectores 11
2.5 Características de una fuerza 13
2.6 Ley del paralelogramo 14
2.7 Ley de los senos y de los cosenos 15
2.8 Suma de tres o más fuerzas en el plano 18

2.9 Componentes de una fuerza en el plano 19
2.10 Representación cartesiana de una fuerza en el plano 20
2.11 Suma de fuerzas por el método de adición de componentes 23
2.12 Equilibrio de una partícula en el plano 26
2.13 Sistema de coordenadas y vectores de posición 30
2.14 Representación cartesiana de una fuerza en el espacio 32
2.15 Fuerza definida por su magnitud y su dirección 35
2.16 Equilibrio de una partícula en el espacio 39
2.17 Problemas propuestos 44

Capítulo 3
Sistemas equivalentes de fuerzas 55
Objetivos del capítulo 55
3.1 Introducción 55
3.2 Producto vectorial de dos vectores 56
3.3 Propiedades del producto vectorial 57
3.4 Producto vectorial de los vectores unitarios 57
3.5 Representación cartesiana del producto vectorial 58
3.6 Interpretación geométrica del producto vectorial 59
3.7 Características del momento de una fuerza 61
3.8 Momento de una fuerza con respecto a un punto 63
3.9 Representación cartesiana del momento de una fuerza 64
3.10 Principio de transmisibilidad 68
3.11 Principio de los momentos o teorema de Varignon 70
3.12 Momento de una fuerza en el plano 71
3.13 Producto escalar de dos vectores 75
3.14 Propiedades del producto escalar 75
3.15 Producto escalar de los vectores unitarios 76
3.16 Producto escalar en forma de componentes 76
3.17 Aplicaciones del producto escalar 76
3.18 Momento de una fuerza con respecto a un eje dado 78
3.19 Momento de un par 82
3.20 Suma de pares 84

3.21 Sistemas equivalentes de fuerzas 86
3.22 Sistema fuerza-par equivalente 88
3.23 Sistema fuerza-par equivalente de varias fuerzas 92
3.24 Conversiones de sistemas equivalentes de fuerzas 98
3.25 Reducción de un sistema de fuerzas en el plano en una fuerza única equivalente. 98
3.26 Conversión de un sistema de fuerzas paralelas en una fuerza única equivalente... 101
3.27 Reducción de un sistema de fuerzas en el espacio en un torsor 106
3.28 Consideraciones acerca de los sistemas equivalentes de fuerzas 107
3.29 Problemas propuestos 107

Capítulo 4
Equilibrio de cuerpos rígidos 114
Objetivos del capítulo 114
4.1 Introducción 114
4.2 Equilibrio de un cuerpo rígido 115
4.3 Equilibrio bajo la acción de dos y de tres fuerzas 116
4.4 Diagrama de cuerpo libre 117
4.5 Indeterminación estática 130
4.6 Problemas propuestos 131

Capítulo 5
Análisis de armaduras 135
Objetivos del capítulo 135
5.1 Introducción 135
5.2 Fuerzas internas y externas 136
5.3 Barras a tensión o a compresión 136
5.4 Barras de fuerzas conocidas 137
5.5 Método de los nudos 140
5.6 Método de las secciones 143
5.7 Problemas propuestos 150

Capítulo 6
Centros de gravedad, centroides y fuerzas distribuidas 160
Objetivos del capítulo 160

6.1 Introducción 160
6.2 El peso como una fuerza equivalente 162
6.3 Punto de aplicación de la resultante de varias fuerzas paralelas 162
6.4 Centro de gravedad de un cuerpo 164
6.5 Centroide de un área 165
6.6 Ejes de simetría de un área 168
6.7 Centroide de áreas compuestas 169
6.8 Fuerzas distribuidas sobre vigas 175
6.9 Problemas propuestos 179

Capítulo 7
Momentos de inercia de áreas 184
Objetivos del capítulo 184
7.1 Introducción 184
7.2 Momentos de primer y segundo orden 186
7.3 Momentos de primer y segundo orden de un área rectangular 188
7.4 Momento polar de inercia 190
7.5 Teorema de los ejes paralelos 191
7.6 Momento de inercia de áreas compuestas 195
7.7 Problemas propuestos 202

Capítulo 8
Diagramas de fuerzas cortantesy de momentos flectores en vigas 207
Objetivos del capítulo 207
8.1 Introducción 207
8.2 Tipos de cargas y de apoyos en vigas 208
8.3 Fuerza cortante y momento flector 209
8.4 Convención de signos 209
8.5 Diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores 210
8.6 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector 212
8.7 Funciones de singularidad y diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores 214
8.8 Aplicación directa de las funciones de singularidad 223

8.9 Tipos de cargas distribuidas y funciones de singularidad 226
8.10 Soluciones de vigas con cargas distribuidas por funciones de singularidad 237
8.11 Problemas propuestos 249

Capítulo 9
Fricción 253
Objetivos del capítulo 253
9.1 Introducción y antecedentes 253
9.2 Leyes de la fricción seca 254
9.3 Problemas propuestos 262

Respuestas a problemas seleccionados 267
Capítulo 2 267
Capítulo 3 268
Capítulo 4 269
Capítulo 5 270
Capítulo 6 272
Capítulo 7 273
Capítulo 8 274
Capítulo 9 281

Bibliografía 283

El autor 284

Presentación

El desarrollo del presente texto ha sido orientado, tanto en su intensidad como en su enfoque, de acuerdo con los temas contemplados regularmente en los respectivos planes curriculares de diversas universidades del país que ofrecen la asignatura Estática para los programas de Ingeniería.

El texto contiene nueve capítulos con problemas resueltos paso a paso, con énfasis en áreas que, por experiencia docente de más de veinte años en dicha asignatura, se ha observado que ofrecen más dificultades a los estudiantes al tomar el curso; en este sentido, se encuentra dirigido a ellos.

Al final de cada capítulo se proponen algunos problemas para resolver en clase con los estudiantes mediante talleres, sumado al hecho de que los temas son presentados como fundamentos no solo para solucionar, sino también para plantear situaciones que conduzcan a crear nuevos problemas, bien sea de representaciones de situaciones prácticas o de idealizaciones, que ayuden a profundizar en los conocimientos de la estática; son los elementos destinados a los docentes.

En el capítulo 1 se establecen las divisiones de la mecánica como ciencia física, de la cual forma parte la estática, se mencionan algunos hechos históricos, se analizan los conceptos de partícula y cuerpo rígido, así como las leyes de Newton, y se estudian los sistemas de unidades relacionados.

El objetivo principal del capítulo 2 consiste en analizar el equilibrio de una partícula, tanto en el plano como en el espacio, por aplicación de la primera ley de Newton, para lo cual es importante definir las cantidades escalares y vectoriales, así como las características de las fuerzas, descomponer estas fuerzas y sumarlas de forma gráfica y analítica, para hallar una resultante.

Las herramientas del álgebra vectorial, como el producto vectorial y el producto escalar, se presentan en el capítulo 3, como bases para los temas de momentos de una fuerza con respecto a un punto y con respecto a un eje, importantes para abordar el análisis de

las condiciones en que un sistema de fuerzas puede ser reemplazado por una sola fuerza o por un sistema equivalente, más simplificado, contemplado también al final.

En el capítulo 4 se estudian las condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido en el plano, los tipos de apoyos y conexiones y la forma de ser reemplazados por fuerzas equivalentes, con el fin de elaborar el correspondiente diagrama de cuerpo libre, necesario para el análisis de equilibrio.

De forma sencilla y fácil de entender, en el capítulo 5 son presentados el método de los nudos y el de las secciones para calcular en las armaduras las fuerzas soportadas por las barras y determinar, además, si se encuentran sometidas a tensión o a compresión.

El cálculo de centroides de áreas compuestas, asociadas con las cargas distribuidas en vigas y la forma de ser sustituidas por fuerzas equivalentes, con el fin de ser aplicables en la determinación de las reacciones en los apoyos, constituye uno de los objetivos principales del capítulo 6.

Con base en los fundamentos matemáticos utilizados para calcular los centroides de áreas, tomados como momentos de primer orden, son tratados los momentos de inercia de áreas, considerados de segundo orden, en el capítulo 7, en tanto propiedades geométricas de la sección transversal de un elemento estructural o de máquina, para relacionarlos con los registrados en tablas de perfiles.

El análisis de fuerzas cortantes y momentos flectores en vigas, con diferentes tipos de cargas —puntuales, distribuidas uniformes, lineales crecientes o decrecientes—, los diagramas y ecuaciones relacionadas, como bases para los temas de resistencia de materiales, como el cálculo de esfuerzos máximos, pendientes y deflexiones en vigas, conforme a la ley de Hooke, son contemplados en el capítulo 8.

Para concluir con la temática relacionada, se contempla en el capítulo 9 lo referente al equilibrio de cuerpos, desde el punto de vista de la estática, en donde intervienen fuerzas de fricción.

Conceptos generales

1

Objetivos del capítulo

- Establecer las definiciones generales de la mecánica y sus divisiones.
- Mencionar elementos históricos de la mecánica.
- Analizar los conceptos de partícula y cuerpo rígido y las leyes de Newton.
- Definir los sistemas de unidades usados frecuentemente en mecánica.
- Dar recomendaciones generales para la solución de problemas y la presentación de resultados en forma de cifras significativas.

1.1 Definiciones de la mecánica

La *física* es la ciencia que da explicación de todos los fenómenos que suceden a nuestro alrededor, así como en el universo en general. Es por tanto una ciencia muy amplia, tanto teórica como experimental, que estudia las propiedades del espacio, el tiempo, la materia y la energía, así como las interacciones entre estos.

La *mecánica* se define como la ciencia física que estudia el estado de reposo o de movimiento de los cuerpos sometidos a fuerzas. Las leyes de la mecánica, como teorías científicas, interpretan fenómenos físicos que se observan experimentalmente y rigen el comportamiento, en general, de gases, de líquidos y de cuerpos sólidos. Sus principios encuentran aplicación en astronomía para explicar el movimiento de los cuerpos celestes, en física para interpretar los fenómenos relacionados con la velocidad y la aceleración y en ingeniería para el estudio de las máquinas y las estructuras. La mecánica se divide en mecánica cuántica, mecánica relativista y mecánica clásica.

La *mecánica cuántica* estudia el movimiento de las partículas elementales o cuantos, los cuales no se pueden describir con las mismas teorías aplicables a los cuerpos macroscópicos contemplados usualmente por la mecánica en general. La *mecánica relativista,* por su parte, analiza el comportamiento de los cuerpos con velocidades cercanas a la de la luz. Y la denominada *mecánica clásica* se encarga del estudio de los cuerpos que se desplazan a velocidades bajas comparadas con la de la luz.

Para su simplificación, el estudio de la mecánica clásica, o simplemente mecánica, se divide a su vez en tres ramas: mecánica de los cuerpos rígidos, mecánica de los cuerpos deformables y mecánica de los fluidos.

La *mecánica de los cuerpos rígidos* analiza la interacción entre los cuerpos y las fuerzas aplicadas, considerando que dichos cuerpos no sufren alteración en su forma al ser sometidos a la acción de las mencionadas fuerzas. Es por lo que, en sentido generalizado, la mecánica de los cuerpos rígidos solo considera las fuerzas externas al cuerpo, sin tener en cuenta las fuerzas internas o resistentes que se generan. La mecánica de los cuerpos rígidos se subdivide a su vez en *estática,* la cual estudia las condiciones en que un cuerpo se mantiene en estado de reposo, y en *dinámica,* la cual analiza las situaciones de movimiento de los cuerpos sometidos a fuerzas.

En el estudio de la *mecánica de los cuerpos deformables* se tienen en cuenta tanto las distribuciones de las fuerzas internas resistentes ocasionadas por la aplicación de las fuerzas externas como las deformaciones que se produzcan en el material. La mecánica de los cuerpos deformables también se denomina mecánica de materiales o resistencia de materiales.

Finalmente, la *mecánica de los fluidos* es la rama de la mecánica que se ocupa de los líquidos y gases en reposo o en movimiento.

1.2 Breve reseña histórica

Aunque no se conocen con exactitud los inicios de la mecánica como disciplina, su historia está ligada a la necesidad del hombre del uso de herramientas cada vez más elaboradas.

A Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) se le atribuye el ser el creador de la mecánica, al establecer las leyes de la palanca y al desarrollar sistemas de poleas o polipastos utilizando su ventaja mecánica para levantar grandes pesos con fuerzas relativamente pequeñas. Se dice, además, que Arquímedes inventó la catapulta y un sistema de espejos para concentrar los rayos solares, los cuales utilizó como maquinaria de guerra. También dio lugar a la hidrostática mediante el denominado principio de Arquímedes, al establecer la relación entre el empuje experimentado por un cuerpo sumergido en un líquido y el volumen desalojado.

Leonardo da Vinci (1452-1519) tomó el trabajo de Arquímedes sobre las palancas para adicionarle el concepto de *momento* y utilizarlo en el equilibrio de cuerpos rígidos.

Simón Stevin (1548-1620) representó la fuerza como un vector y mostró cómo sumar dos fuerzas mediante la construcción de un paralelogramo, tomando su diagonal como la resultante, lo cual se denomina ley del paralelogramo, para la suma de dos fuerzas. Stevin ideó también el método del trabajo virtual para el análisis del equilibrio de cuerpos rígidos.

Galileo Galilei (1564-1642) contribuyó al desarrollo de la dinámica con el descubrimiento de la ley del péndulo y los estudios sobre la caída de los cuerpos. Se ingenió la forma de medir el tiempo mediante su propio pulso debido a la falta de relojes en su época.

Christian Huygens (1629-1695) continuó los trabajos de Galileo con péndulos y en 1656 patentó el primer reloj de péndulo, que permitió medir el tiempo con más precisión, lo cual era necesario para poder avanzar en el estudio de la dinámica. Dedujo también la ley de la fuerza centrífuga en un movimiento circular uniforme.

Isaac Newton (1642-1727), mediante el enunciado de las denominadas leyes del movimiento y ley de la gravitación universal, dio impulso a la mecánica clásica y a lo que se conoce como mecánica newtoniana.

Albert Einstein (1879-1955), mediante sus teorías de relatividad especial (1905) y de relatividad general (1912), crea la mecánica relativista, en la que, a diferencia de la mencionada mecánica newtoniana, los conceptos de espacio, tiempo y masa no son independientes y absolutos, sino relativos y dependientes de la velocidad. Esas nuevas concepciones logran dar predicciones más precisas de los movimientos de cuerpos cercanos a la velocidad de la luz, no obtenidas antes mediante la mecánica newtoniana.

Max Planck (1858-1947), físico alemán considerado como el fundador de la mecánica cuántica, recibió por sus teorías el Premio Nobel de Física en 1918. El campo de estudio de la mecánica cuántica está relacionado con partículas elementales en sistemas con espacios de dimensiones a escala atómica.

1.3 Concepto de partícula y cuerpo rígido

En mecánica el término *partícula* se utiliza para referirse o bien a un punto donde actúan una o varias fuerzas, o bien a un cuerpo rígido modelado como una masa puntual cuando las fuerzas aplicadas solo intentan producir acciones de traslación. Tal puede ser el caso de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto de un cuerpo rígido con solo posibilidades de traslación, para lo cual se simplifica su análisis si se representa al cuerpo como una partícula o punto donde se concentran las fuerzas.

Un cuerpo rígido se considera formado por muchas partículas separadas entre sí por distancias constantes, aun bajo la acción de fuerzas. Si se aplican fuerzas en más de una partícula de un cuerpo rígido, estas tienden a producir efectos tanto de traslación como de rotación, debidos a los respectivos momentos, causados por la separación existente entre las líneas de acción de las fuerzas.

1.4 Leyes de Newton

El estudio de la mecánica está fundamentado principalmente en las denominadas leyes de Newton o leyes del movimiento de Newton, compuestas por tres leyes, además de la ley de la gravitación, y enunciadas así:

1. *Primera ley de Newton:* si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a cero, la partícula permanecerá en reposo si inicialmente estaba en reposo o se moverá con rapidez constante si inicialmente estaba en movimiento.
2. *Segunda ley de Newton:* si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es diferente de cero, la partícula se moverá con una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta. Si se designa por $\vec{F}$ la fuerza, m la masa y $\vec{a}$ la aceleración, la segunda ley de Newton se expresa en forma de ecuación así: $\vec{F} = m\vec{a}$.
3. *Tercera ley de Newton o principio de acción y reacción:* contempla el fenómeno de interacción entre dos cuerpos en contacto, al declarar la presencia de dos fuerzas denominadas de acción y de reacción, las cuales tienen la misma magnitud y la misma línea de acción, aunque sentidos contrarios.
4. *Ley de la gravitación de Newton:* establece que la atracción mutua entre dos partículas de masas m_1 y m_2, separadas una distancia d, está dada por una fuerza F, la cual es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, o sea que:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

F = fuerza de atracción entre las dos partículas.
m_1 y m_2 = masas de las partículas.
d = distancia que las separa.
G = constante de gravitación.

1.5 Sistemas de unidades

Los sistemas de unidades utilizados en mecánica cuentan con elementos para medir las cuatro cantidades básicas: la longitud, la masa, el tiempo y la fuerza, las cuales no son independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante la segunda ley del movimiento de Newton, expresada por la ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$.

El sistema de unidades utilizado en la mayoría de los países del mundo ha sido el Sistema Métrico Decimal, aunque desde 1960 su nombre oficial es Sistema Internacional de Unidades (SI). Los países de habla inglesa que todavía no han adoptado el sistema SI, entre los cuales se encuentra Estados Unidos, utilizan el denominado sistema FPS *(foot-pound-second system)*.

1.5.1 Sistema Internacional de Unidades

En el sistema SI, la longitud se mide en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la masa en kilogramos (kg). La unidad de fuerza se denomina Newton (N) y es una unidad derivada teniendo en cuenta la ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$ y se define como la fuerza requerida para dar a una masa de 1 kg una aceleración de 1 m/s², o sea:

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \text{m/s}^2$$

El peso W de un cuerpo de masa de 1 kg o la fuerza de la gravedad con aceleración g que actúa sobre él, expresado en N, está dado así:

$$W = mg = (1\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 9.81\ \text{N}$$

Los múltiplos y submúltiplos en el sistema SI más usados se pueden determinar al aplicar los prefijos dados en la tabla 1.1, por ejemplo:

$$1\ \text{kilómetro (km)} = 10^3\ \text{m} = 1\ 000\ \text{m}$$
$$1\ \text{kilonewton (kN)} = 10^3\ \text{N} = 1\ 000\ \text{N}$$
$$1\ \text{milímetro (mm)} = 10^{-3}\ \text{m} = 0.001\ \text{m}$$

Tabla 1.1 Múltiplos y submúltiplos del Sistema Internacional de Unidades (SI)

Factor	Forma exponencial	Prefijo	Símbolo
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000001	10^{-6}	micro	μ
0.000000001	10^{-9}	nano	n

1.5.2 Sistema de uso común en los Estados Unidos

En el sistema de uso común en los Estados Unidos (el sistema FPS), la longitud se mide en pies (ft), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en libras (lb). La unidad de

masa, denominada slug, es una unidad derivada con base en la ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$ y está definida como la cantidad de materia acelerada 1 ft/s² cuando se somete a una fuerza de 1 lb, así:

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2}$$

Como múltiplos y submúltiplos en el sistema FPS de empleo frecuente se pueden mencionar los siguientes:

$$1 \text{ milla (mi)} = 5\,280 \text{ pies (ft)}$$
$$1 \text{ kilolibra (kip)} = 1\,000 \text{ libras (lb)}$$
$$1 \text{ pulgada (in)} = 1/12 \text{ pies (ft)}$$
$$1 \text{ tonelada (tn)} = 2\,000 \text{ libras (lb)}$$

1.5.3 Conversión de unidades

Con el fin de convertir unidades de un sistema a otro, es necesario tener en cuenta las anotaciones presentadas a continuación. Por definición, la unidad de longitud en el sistema FPS está expresada así:

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

De la anterior se deriva:

$$1 \text{ in} = 1/12 \text{ ft} = 1/12\ (0.3048 \text{ m}) = 0.0254 \text{ m}$$

O sea que:

$$1 \text{ in} = 25.4 \text{ mm}$$
$$1 \text{ mi} = 5\,280 \text{ ft} = (5\,280)(0.3048 \text{ m}) = 1\,609 \text{ m}$$
$$1 \text{ mi} = 1.609 \text{ km}$$

En cuanto a la definición de unidad de masa, en el sistema FPS se tiene:

$$1 \text{ lb masa} = 0.4536 \text{ kg}$$

La unidad de fuerza se define como el peso de una libra de masa 0.4536 kg a la aceleración de la gravedad de 9.807 m/s², o sea:

$$1 \text{ lb} = (0.4536 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 4.448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Por lo tanto:

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N}$$

1.6 Cálculos numéricos y cifras significativas

Los resultados de cálculos numéricos se expresan mediante el número de cifras significativas adecuadas, al tener en cuenta que los valores relacionados con cualquier tipo de medición pueden involucrar errores, que dependen del grado de exactitud del instrumento de medición. Si se compara, por ejemplo, la medida tomada con una regla común con valores mínimos de 1 mm o con un micrómetro cuya precisión puede ser de ± 0.01 mm, la medida tomada con el micrómetro es más exacta, o sea, tiene menos error.

La exactitud de un valor medido se expresa al escribir el número además del símbolo ±, seguido de un segundo número que indica el error o incertidumbre. Afirmar que el diámetro de una pieza cilíndrica es 18.24 ± 0.02 mm quiere decir que el valor real se puede encontrar entre 18.22 mm como límite inferior y 18.26 mm como cota superior.

Las cifras significativas cumplen con el objetivo de dar información certera proveniente de medidas al indicar el error o las incertidumbres asociadas. Estas comprenden los dígitos significativos que se encuentran hacia la derecha, a partir del primer dígito no nulo; por ejemplo, los números 4.30 y 0.0430 cuentan cada uno con tres cifras significativas.

En ingeniería el redondeo de números es válido para ajustar los resultados a un determinado número de cifras significativas, que, conforme a la experiencia, se ha convenido en expresarlos solo con tres cifras significativas. Por lo tanto, las respuestas en este texto serán dadas, en lo posible, con base en dicha regla, de modo que es conveniente también, al realizar los cálculos en computador o calculadoras de bolsillo, que el número de cifras significativas del resultado final de la respuesta se limite a tres.

Como reglas de redondeo se pueden adoptar las dos siguientes:

1. Si el dígito no significativo que sigue al último dígito significativo es mayor o menor que 5, se redondea el último dígito significativo hacia arriba o hacia abajo, respectivamente, así: 4.372 a 4.37 y 4.376 a 4.38.
2. Si el dígito no significativo que sigue al último dígito significativo es igual a 5, entonces el último dígito significativo se redondea siempre hacia un número par. Así se consigue que en promedio la mitad de estos redondeos sea hacia arriba y la otra mitad hacia abajo. Por ejemplo: 4.375 a 4.38 y 4.365 a 4.36.

1.7 Procedimiento para la solución de problemas

El punto de partida para la solución de problemas constituye el entendimiento de los principios básicos de la mecánica y las leyes que de ellos se desprenden. Tanto la destreza en la solución de problemas como el aprendizaje de dichos principios solo se adquieren al ejercitarse, para lo cual resulta recomendable primero realizar una revisión cuidadosa de los ejemplos resueltos y después resolver el mayor número posible de los problemas propuestos.

Es necesario tener presente que para abordar un problema se debe partir de una situación física real de este, la cual debe representarse en una hoja de trabajo como un diseño sencillo a mano alzada. Es importante proceder de manera ordenada y limpia para evitar confusiones y, en la medida de lo posible, organizar los datos en tablas.

Posteriormente, se dibujarán uno o varios diagramas de cuerpo libre, con el fin de aislar cada uno de los elementos e identificar las fuerzas externas que actúan sobre cada uno de ellos. La geometría del problema es importante, por lo que de las relaciones trigonométricas se desprende la solución matemática.

Equilibrio de la partícula

2

Objetivos del capítulo

- Estudiar el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto o sobre una partícula.
- Analizar los conceptos de fuerzas, clases de fuerzas, formas de representación y unidades.
- Determinar la resultante de dos o más fuerzas mediante la ley del paralelogramo y la regla del polígono.
- Descomponer las fuerzas en componentes rectangulares y sumarlas mediante el método de adición de componentes.
- Aplicar la primera ley de Newton para el equilibrio de una partícula en el plano y en el espacio.

2.1 Introducción

El objetivo básico del presente capítulo constituye el análisis de equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto o sobre una partícula.

Según se ha afirmado previamente, en mecánica el término *partícula* se utiliza para referirse o bien a un punto donde actúan una o varias fuerzas, o bien a un cuerpo rígido modelado como una masa puntual cuando las fuerzas aplicadas solo intentan producir acciones de traslación.

Muchas de las situaciones de equilibrio en ingeniería están relacionadas con la interacción de elementos que implican fuerzas cuyas líneas de acción se cortan en un punto,

denominadas *fuerzas concurrentes,* para las cuales realizar la sumatoria e igualarlas a cero es suficiente para su análisis estático, al aplicar la primera ley de Newton.

No ocurre lo mismo cuando se trata de fuerzas que actúan en dos o más puntos, o partículas, diferentes de un cuerpo rígido, las cuales no se consideran concurrentes, por lo que requieren, además del mencionado análisis estático de fuerzas, obtener la sumatoria de los respectivos momentos e igualarlos a cero, para cumplir con la primera ley de Newton.

Las consideraciones básicas tenidas en cuenta en las dos situaciones anteriores determinan la división entre el tratamiento dado al equilibrio de la partícula, en el primer caso, el cual será desarrollado en este capítulo, y el dado al equilibrio de cuerpos rígidos, en el segundo, que se estudiará en un capítulo posterior.

2.2 Generalidades sobre las fuerzas

Una *fuerza* se puede definir como el efecto producido al actuar un cuerpo sobre otro. Las fuerzas que ejercen entre sí los cuerpos en la naturaleza responden a las cuatro siguientes interacciones básicas:

- *Interacción gravitatoria:* la ejercida por los cuerpos entre sí como consecuencia de poseer masa. El peso de un cuerpo es el resultado de la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra.
- *Interacción electromagnética:* se manifiesta de dos formas: entre partículas con cargas eléctricas en reposo, o electrostáticas, y entre partículas con cargas eléctricas en movimiento, o magnéticas.
- *Interacción nuclear fuerte:* la que mantiene a los protones y los neutrones juntos en el núcleo del átomo.
- *Interacción nuclear débil:* la que se da entre partículas de menor tamaño relativo, como los electrones y los positrones.

Las clases de fuerzas que son objeto de estudio en la mecánica clásica son, por un lado, las relacionadas con las de interacción gravitatoria, como el peso de los cuerpos, cuyas acciones se manifiestan a distancia, y, por otro, las fuerzas de contacto, como las de empuje entre sólidos, líquidos y gases, las de fricción y las elásticas, las cuales actúan en las cercanías entre los cuerpos, y que son consideradas dentro de la clasificación de las de interacción electromagnética.

Las fuerzas entre los cuerpos producen dos efectos que son estudiados en mecánica: uno externo, que se manifiesta en el cambio del estado de reposo o de movimiento del cuerpo sobre el cual actúan, y otro interno, que tiende a deformarlo. Como se ha expresado, el análisis del primer efecto es contemplado en la mecánica de los cuerpos rígidos, mientras que el segundo se estudia en la mecánica de los cuerpos deformables.

2.3 Cantidades escalares y vectoriales

A las cantidades físicas como el tiempo, la masa, el volumen, la temperatura y la energía, que pueden expresarse completamente, en forma matemática, mediante un número o escalar, se les denomina *cantidades escalares*. Estas se caracterizan porque obedecen las reglas de la adición del álgebra ordinaria. O sea que resulta válido sumar, por ejemplo, un tiempo de 10 segundos más un tiempo de 5 segundos, para obtener un tiempo total de 15 segundos.

En cambio, las expresiones como la velocidad, la aceleración, la cantidad de movimiento y la fuerza, las cuales para ser definidas plenamente requieren de una magnitud y una dirección, o de más de un escalar, se conocen con el nombre de *cantidades vectoriales,* las cuales están sujetas a reglas especiales para la adición, tales como la denominada ley del paralelogramo, la cual será estudiada más adelante.

Debido a que resulta erróneo confundir cantidades escalares con vectoriales, porque no responden a las mismas reglas de operación, es necesario recurrir a algún tipo especial de escritura con el fin de diferenciarlas. Una forma común, la cual usaremos en este texto, consiste en indicar una cantidad vectorial mediante una letra mayúscula cursiva en negrita con una punta de flecha encima, como $\vec{\boldsymbol{V}}$, mientras que para expresar una cantidad escalar se hará simplemente mediante una letra mayúscula cursiva, como V.

2.4 Operaciones entre escalares y vectores

Definiciones. Los siguientes términos son necesarios para establecer operaciones entre escalares y vectores:

- Se define el vector $\vec{\boldsymbol{V}}$ de magnitud V, al cual se le indica su sentido mediante una punta de flecha y su dirección con el ángulo α, que forma con un eje de referencia, como se muestra en la figura 2.1(a).
- Dos vectores $\vec{\boldsymbol{V}}$ son iguales si tienen la misma magnitud, la misma dirección y el mismo sentido, según se ilustra en la figura 2.1(b).
- El vector negativo $-\vec{\boldsymbol{V}}$ de un vector $\vec{\boldsymbol{V}}$ se define como aquel que tiene la misma magnitud, la misma dirección y un sentido contrario a $\vec{\boldsymbol{V}}$, lo cual se aprecia en la figura 2.1(c).

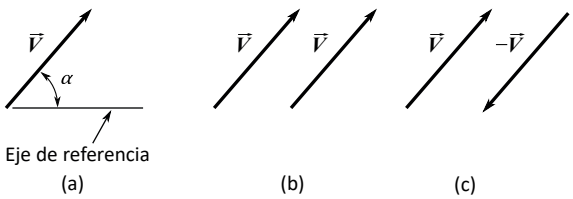


Figura 2.1

Producto de un escalar por un vector. La suma de dos vectores iguales $\vec{V} + \vec{V}$ corresponde al vector $2\vec{V}$, de magnitud $2V$, cuya dirección y sentido son los mismos del vector $\vec{V}$, como lo muestra la figura 2.2(a); asimismo, la adición de $\vec{V} + \vec{V} + \vec{V}$ es equivalente al vector $3\vec{V}$, de magnitud $3V$, con dirección y sentido iguales a los del vector $\vec{V}$, como se indica en la figura 2.2(b).

En forma general, la suma de k vectores iguales $\vec{V}$ se representa por el producto $k\vec{V}$, como un vector de magnitud kV con la misma dirección y sentido de $\vec{V}$, como se aprecia en la figura 2.2(c).

Debido a que el escalar k puede ser positivo o negativo, se puede afirmar que el producto $k\vec{V}$ resulta ser un vector de magnitud kV con la misma dirección y sentido de $\vec{V}$, si k es positivo, o de la misma dirección y sentido contrario a $\vec{V}$, si k es negativo, como se muestra en la figura 2.2(d).

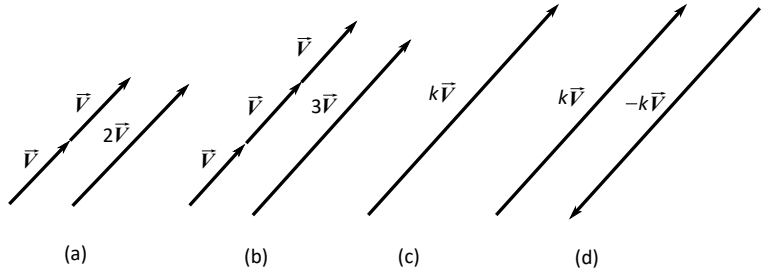


Figura 2.2

División de un vector entre un escalar. La división de un vector $\vec{V}$ entre un escalar k es equivalente al producto de $\vec{V}$ por el inverso de k, o sea $\vec{V}/k = (1/k)\vec{V}$, por lo tanto, se cumplen las mismas reglas en cuanto a dirección y sentido dadas anteriormente para el producto $k\vec{V}$.

La relación entre el vector $\vec{V}$ y su magnitud, cuando se divide por un escalar k, se aprecia en la figura 2.3. Al comparar $\vec{V}$, si $k = 1$, su magnitud es igual, como se muestra en la figura 2.3(a); si $k > 1$, su magnitud disminuye, como se ilustra en la figura 2.3(b); y si $k < 1$, la magnitud de $\vec{V}$ aumenta, como se observa en la figura 2.3(c).

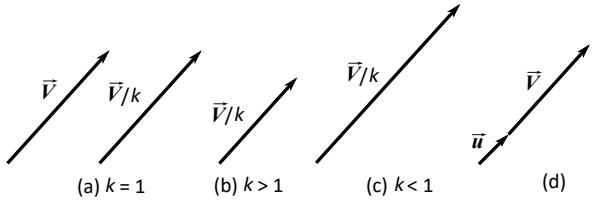


Figura 2.3

Vector unitario. El cociente de dividir un vector $\vec{V}$ entre su magnitud V da como resultado lo que se denomina *vector unitario,* mostrado en la figura 2.3(d), el cual se designa por $\vec{u}$ y se expresa así:

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V} \tag{2.1}$$

El vector unitario $\vec{u}$ tiene la misma dirección de $\vec{V}$ y su magnitud es $V/V = 1$, por lo tanto, es adimensional; entonces, el vector $\vec{V}$ se puede expresar en términos de su vector unitario $\vec{u}$, así:

$$\vec{V} = \vec{u}V \tag{2.2}$$

La expresión 2.2 es útil cuando se desea definir un vector y se cuenta con su magnitud y su dirección, dadas como un vector unitario, como se verá más adelante (en la sección 2.15).

2.5 Características de una fuerza

Una fuerza se representa mediante una cantidad vectorial, por tanto, se caracteriza por poseer: punto de aplicación, magnitud, dirección y sentido.

Punto de aplicación. Una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula A, como se muestra en la figura 2.4(a), se dice que tiene su punto de aplicación en dicha partícula.

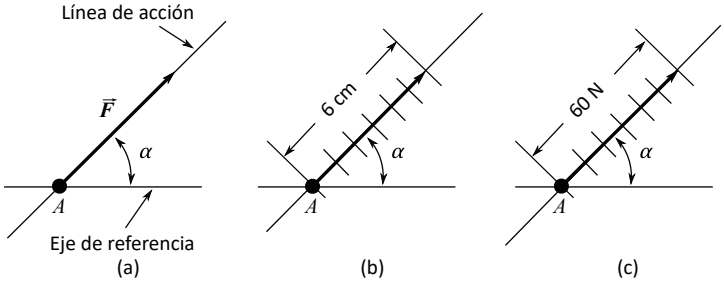


Figura 2.4

Magnitud. La magnitud de una fuerza es la medida de su mayor o menor capacidad de acción y está expresada en forma de una cantidad escalar. Sus unidades están dadas básicamente como: newton (N), en el sistema SI, y libra (lb), en el sistema FPS.

Dirección. La dirección de una fuerza está determinada por el ángulo α formado por su línea de acción, con un cierto eje de referencia, como se indica en la figura 2.4(a), siendo su línea de acción una línea infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza.

Sentido. Una fuerza se representa en forma gráfica mediante un segmento de recta, con una punta de flecha en uno de los extremos para indicar el sentido. En la figura 2.4(a) el sentido de la fuerza es hacia arriba y a la derecha.

Si se utiliza una escala apropiada, la magnitud de una fuerza puede ser expresada mediante la longitud de dicho segmento. Por ejemplo, si se define una escala de 1 cm correspondiente a 10 N y se desea dibujar una fuerza de 60 N, el segmento de recta que lo represente será de 6 cm, lo cual se aprecia en las figuras 2.4(b) y 2.4(c).

2.6 Ley del paralelogramo

La ley del paralelogramo establece que dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que actúan sobre una partícula A se pueden reemplazar por una sola fuerza $\vec{R}$, denominada resultante, la cual produce el mismo efecto que dichas fuerzas en su conjunto si se construye con $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ un paralelogramo, siendo $\vec{R}$ su diagonal, como se ilustra en la figura 2.5(b). Lo anterior se expresa así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

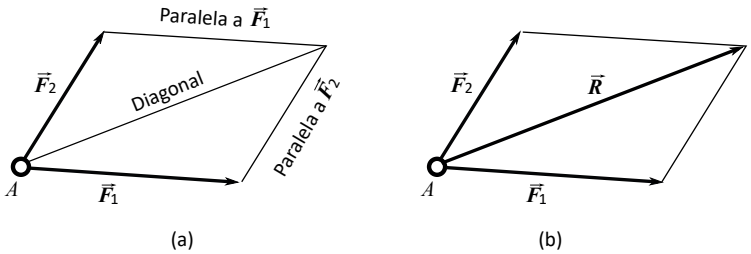


Figura 2.5

Para aplicar la ley del paralelogramo, se dibujan las dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ a escala, colocándolas a partir de un mismo punto A, se trazan después líneas paralelas a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ para formar un paralelogramo, y por último se dibuja a $\vec{R}$ al hacerla coincidir con la diagonal, como se indica en las figuras 2.5(a) y 2.5(b).

Una consecuencia de la ley del paralelogramo es la denominada *regla del triángulo,* que consiste en obtener la resultante $\vec{R}$, de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, al dibujar las dos fuerzas, también a escala, una a continuación de la otra, como se indica en las figuras 2.6(a) y 2.6(b), y unir después el inicio de la primera con el extremo de la segunda mediante un vector suma de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, o resultante $\vec{R}$, para formar un triángulo con las tres fuerzas.

Nótese que el resultado obtenido es el mismo, si el triángulo se construye de dos formas: colocando $\vec{F}_2$ a continuación de $\vec{F}_1$, como lo muestra la figura 2.6(a), o viceversa,

$\vec{F}_1$ seguido de $\vec{F}_2$, como se aprecia en la figura 2.6(b), lo cual comprueba la propiedad conmutativa de la adición de fuerzas, o sea:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$$

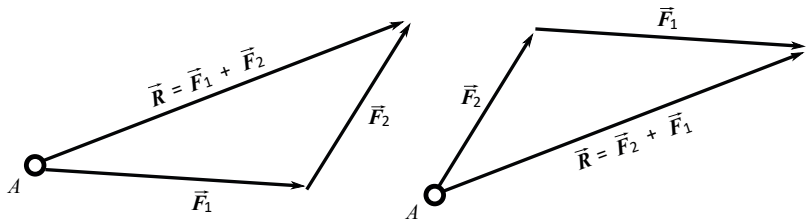


Figura 2.6

2.7 Ley de los senos y de los cosenos

Dado que la ley del paralelogramo y la consecuente regla del triángulo, para la suma de dos fuerzas, involucran las respectivas magnitudes, incluida la de su resultante, las cuales se pueden representar mediante los lados de un triángulo y sus correspondientes ángulos internos, como lo muestran las figuras 2.7(a) y 2.7(b), entonces es posible hallar las magnitudes requeridas de las fuerzas, al resolver las relaciones entre dichos lados y ángulos, mediante la aplicación de la ley de los senos y de los cosenos.

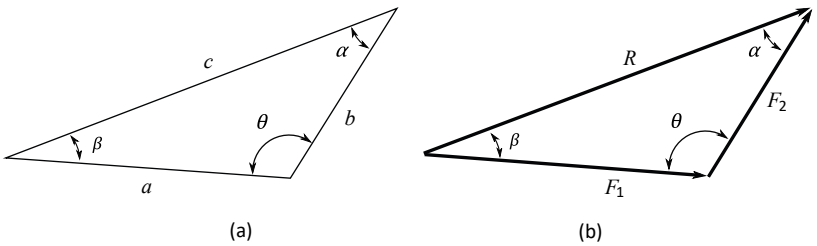


Figura 2.7

Ley de los senos. Dado el triángulo mostrado en la figura 2.7(a) de lados a, b y c y cuyos correspondientes ángulos opuestos son α, β y θ, se cumplen las siguientes relaciones entre los lados y los senos de los ángulos opuestos, así:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \theta} \tag{2.3}$$

Ley de los cosenos. El cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que forman. O sea, teniendo en cuenta la figura 2.7(a), se expresa así:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \alpha \tag{2.4}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ \beta \tag{2.5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab\ cos\ \theta \tag{2.6}$$

Si en la relación 2.6 se reemplaza el ángulo θ por el valor de 90°, o sea que el triángulo queda convertido en rectángulo, resulta la siguiente expresión denominada *teorema de Pitágoras:*

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{2.7}$$

2.7.1 Ejemplo 2.1

Dadas dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de magnitudes respectivas 80 N y 70 N, las cuales forman entre sí un ángulo δ = 60°, como se indica en la figura 2.8. Hallar la magnitud R de la resultante.

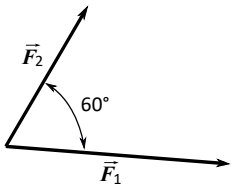


Figura 2.8

Solución

Se traza inicialmente un paralelogramo con $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ como lados, como se muestra en la figura 2.9(a), en la cual se observa que los ángulos δ y γ son correspondientes, por lo tanto, son iguales, o sea que $\delta = \gamma$ = 60°. Asimismo, se deduce que los ángulos θ y γ son suplementarios, de tal forma que θ = 180° – γ = 180° – 60° = 120°.

Se completa el paralelogramo al dibujar a $\vec{R}$ como la diagonal y se reemplazan los ángulos θ y γ, por sus valores, como se ilustra en la figura 2.9(b).

Del paralelogramo anterior se elabora un triángulo de fuerzas, al trasladar a $\vec{F}_2$ a continuación de $\vec{F}_1$, como se muestra en la figura 2.9(c). Se sustituyen los valores de las respectivas magnitudes y se designan los ángulos internos α y β, como se aprecia en la figura 2.9(d).

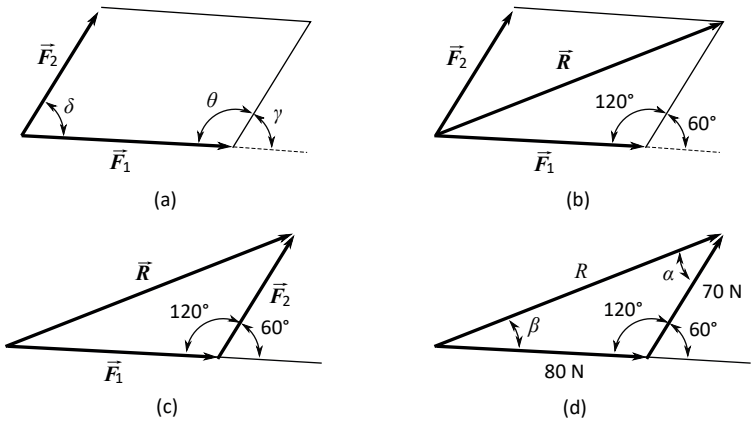


Figura 2.9

Se aplica la ley de los cosenos, teniendo en cuenta que la magnitud R es opuesta al ángulo de 120°, siendo este a su vez el ángulo entre las magnitudes 80 N y 70 N, de acuerdo con la figura 2.9(d), y al dar valores, con referencia a la ecuación 2.6, se tiene:

$$R^2 = (80\text{ N})^2 + (70\text{ N})^2 - 2(80\text{ N})(70\text{ N})\cos 120° \qquad \boldsymbol{R = 130\text{ N}}$$

Además, se pueden hallar los ángulos α y β, opuestos a las fuerzas de 80 N y 70 N, respectivamente, con base en la figura 2.9(d), utilizando la ley de los senos, así:

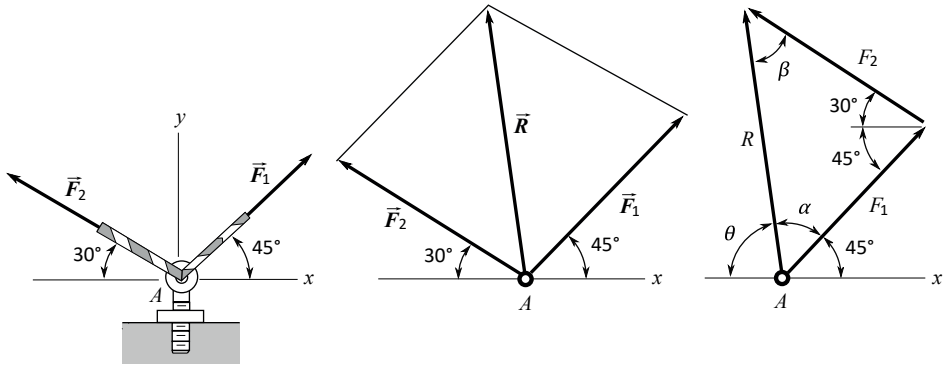
$$\frac{80\text{ N}}{sen\,\alpha} = \frac{130\text{ N}}{sen\,120°} \qquad sen\,\alpha = \frac{(80\text{ N})\,sen\,120°}{130\text{ N}} \qquad \boldsymbol{\alpha = 32.20°}$$

$$\frac{70\text{ N}}{sen\,\beta} = \frac{130\text{ N}}{sen\,120°} \qquad sen\,\beta = \frac{(70\text{ N})\,sen\,120°}{130\text{ N}} \qquad \boldsymbol{\beta = 27.80°}$$

Nótese que $\alpha + \beta + 120° = 32.20° + 27.80° + 120° = 180°$, como era de esperarse, puesto que los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

2.7.2 Ejemplo 2.2

Un pequeño aro A está sometido a la tensión de dos cuerdas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, cada una de magnitud 80 N, como se indica en la figura 2.10(a). Determinar la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



(a) (b) (c)

Figura 2.10

Solución

Se elabora el diagrama de cuerpo libre de la partícula *A* y se forma con $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ un paralelogramo, siendo $\vec{R}$ la resultante, como se aprecia en la figura 2.10(b).

Se construye el triángulo de fuerzas mostrado en la figura 2.10(c), se aplica la ley de los cosenos, para hallar *R*, y posteriormente la ley de los senos, para encontrar los ángulos α y β, así:

$$R^2 = (80\text{ N})^2 + (80\text{ N})^2 - 2(80\text{ N})(80\text{ N})\,cos\,75° \qquad \boldsymbol{R = 97.4\text{ N}}$$

$$\frac{R}{sen\,75°} = \frac{F_1}{sen\,\beta} = \frac{F_2}{sen\,\alpha} \qquad \frac{97.4\text{ N}}{sen\,75°} = \frac{80\text{ N}}{sen\,\beta} = \frac{80\text{ N}}{sen\,\alpha} \qquad \boldsymbol{\alpha = \beta = 52.5°}$$

La dirección de $\vec{R}$ se indica mediante el ángulo α + 45° = 97.5°, como aparece en la figura 2.10(c), aunque es más práctico expresarlo mediante el ángulo θ que forma con el lado negativo del eje *x*, por ser menor de 90°, o sea:

$$\boldsymbol{\theta = 180° - 97.5° = 82.5°}$$

2.8 Suma de tres o más fuerzas en el plano

Para hallar la resultante $\vec{R}$ de tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, mediante la ley del paralelogramo, el procedimiento consiste en sumar inicialmente dos de ellas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, para encontrar una primera resultante $\vec{R}'$, y después sumar nuevamente $\vec{R}'$ con la tercera fuerza $\vec{F}_3$, para determinar la resultante final $\vec{R}$, como se aprecia en la figura 2.11(a).

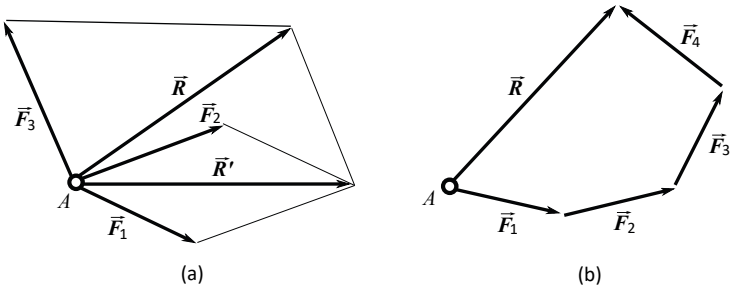


Figura 2.11

Debido a que la resultante final $\vec{R}$ ha sido obtenida por la aplicación sucesiva de la ley del paralelogramo, tiene la propiedad de producir el mismo efecto sobre la partícula A que las fuerzas originales $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, por lo tanto $\vec{R}$ se puede expresar como la suma de las tres, así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

En términos generales, para hallar la resultante de tres o más fuerzas, es necesario aplicar en forma consecutiva la ley del paralelogramo a cada dos de ellas, hasta obtener una resultante final $\vec{R}$, la cual produce el mismo efecto sobre la partícula que todas en su conjunto.

Otra forma de obtener la resultante final $\vec{R}$, para tres o más fuerzas concurrentes, se denomina *regla del polígono,* mostrada en la figura 2.11(b), la cual es una extensión de la regla del triángulo y consiste en sumar varias fuerzas al colocarlas una a continuación de la otra, obteniéndose la resultante $\vec{R}$ al unir el inicio de la primera con el extremo de la última, lo cual se expresa en forma vectorial, así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

2.9 Componentes de una fuerza en el plano

Se ha visto mediante la ley del paralelogramo que dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se pueden reemplazar por una sola fuerza $\vec{R}$, la cual produce el mismo efecto si se construye con $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ un paralelogramo, siendo $\vec{R}$ la diagonal.

El proceso inverso consiste en que si se cuenta con una sola fuerza $\vec{F}$ y dos direcciones o líneas de acción, como se ilustra en la figura 2.12(a), se pueden hallar las respectivas fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, las cuales en su conjunto produzcan el mismo efecto que dicha fuerza original $\vec{F}$.

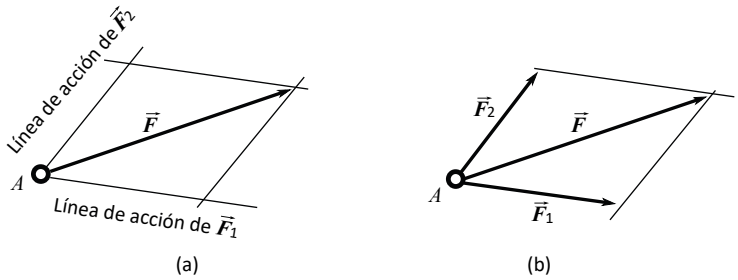


Figura 2.12

Lo anterior se consigue al trazar por el extremo de $\vec{F}$ líneas paralelas a las respectivas direcciones, como se indica en la figura 2.12(b), por lo que al completar el paralelogramo quedan definidas las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, las cuales se denominan *componentes de* $\vec{F}$.

Mediante un procedimiento similar se pueden encontrar dos componentes a cada una de las anteriores y después dos más a cada una de las restantes, hasta descomponer a $\vec{F}$ en el número de fuerzas que se deseen.

2.10 Representación cartesiana de una fuerza en el plano

Cuando una fuerza se encuentra contenida en el plano, es común descomponerla en dos componentes según los ejes *x* y *y*, denominadas componentes rectangulares, porque forman entre sí un ángulo recto.

Considere una fuerza $\vec{F}$ aplicada en el origen *O* de un sistema de coordenadas *xy*, como se muestra en la figura 2.13(a). A partir del extremo de $\vec{F}$ se dibujan rectas paralelas a los ejes *x* y *y* para formar un paralelogramo, siendo $\vec{F}$ su diagonal, lo cual permite trazar las componentes $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$, dadas así:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \tag{2.8}$$

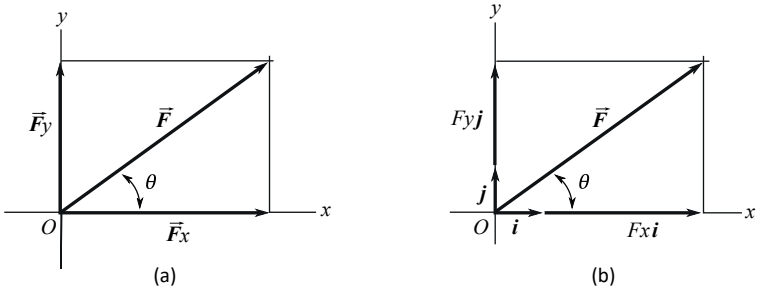


Figura 2.13

Las fuerzas $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ son las componentes vectoriales de $\vec{F}$, y debido a que el paralelogramo formado para hallarlas es un rectángulo, se dice también que son las componentes rectangulares de $\vec{F}$.

La fuerza $\vec{F}$ forma un ángulo θ con el eje x, como se indica en la figura 2.13(b), por lo tanto, teniendo en cuenta que F es la magnitud de $\vec{F}$, se determinan las relaciones entre las componentes escalares, así:

$$F_x = F\ cos\ \theta \quad F_y = F\ sen\ \theta \quad tan\ \theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

$$F^2 = {F_x}^2 + {F_y}^2 \tag{2.10}$$

Con el fin de especificar las direcciones de las componentes vectoriales $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$, se utilizan los denominados vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$, según los ejes x y y, respectivamente, mostrados en la figura 2.13(b), los cuales por definición son vectores de magnitud = 1, por lo que dichas componentes quedan expresadas así:

$$\vec{F}_x = F_x\boldsymbol{i} \qquad \vec{F}_y = F_y\boldsymbol{j} \tag{2.11}$$

Siendo F_x y F_y las componentes escalares de $\vec{F}$. Al reemplazar los respectivos valores en la relación 2.8, se tiene:

$$\vec{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} \tag{2.12}$$

En cuanto a los signos, la componente escalar F_x es positiva si $\vec{F}_x$ tiene el mismo sentido que el eje positivo de las x, y negativa si tiene sentido opuesto; asimismo, la componente escalar F_y es positiva o negativa de acuerdo con el sentido de $\vec{F}_y$, hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

2.10.1 Ejemplo 2.3

Un poste de luz es asegurado al piso al ejercerle una fuerza de 120 N mediante un cable AB, como se indica en la figura 2.14(a). Expresar la fuerza aplicada en el punto A, en forma de componentes vectoriales según los ejes x y y.

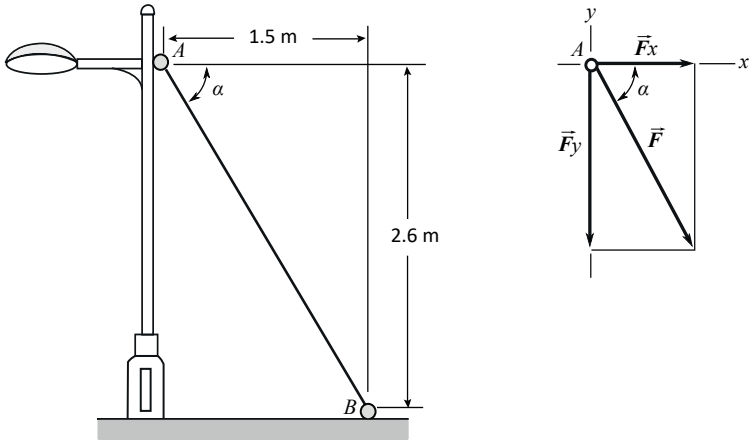


Figura 2.14

Solución

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la partícula *A*, mostrado en la figura 2.14(b), en donde $\vec{F}$ representa la fuerza aplicada en el punto *A*, por tanto, su magnitud es 120 N.

Se observa, en relación con el ángulo formado por la fuerza $\vec{F}$ con el eje *x*, que por encontrarse en el tercer cuadrante de los ejes cartesianos *xy*, su valor real corresponde a 360° – α, aunque para efectos prácticos es utilizado el ángulo conjugado α, por lo tanto, las componentes escalares F_x y F_y se expresan así:

$$F_x = +(120\ \text{N})\ cos\ \alpha \qquad F_y = -(120\ \text{N})\ sen\ \alpha \tag{1}$$

El ángulo α se halla con base en la figura 2.14(a), así:

$$tan\ \alpha = \frac{2.6\ \text{m}}{1.5\ \text{m}} \quad \alpha = tan^{-1}\left(\frac{2.6\ \text{m}}{1.5\ \text{m}}\right) \quad \alpha = 60°$$

Se reemplazan valores en la ecuación 1 para determinar las componentes vectoriales, según las relaciones 2.11, con el fin de aplicar la relación 2.12 y expresar a $\vec{F}$, así:

$$F_x = +60\ \text{N} \qquad \vec{F}_x = +60\ \text{N}\boldsymbol{i} \qquad F_y = -103.92\ \text{N} \qquad \vec{F}_y = -103.92\ \text{N}\boldsymbol{j}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = \mathbf{+60\ N}\boldsymbol{i}\ \mathbf{-\ 103.92\ N}\boldsymbol{j}$$

2.11 Suma de fuerzas por el método de adición de componentes

Cuando se tiene un sistema de fuerzas en el plano, se pueden sumar por medio de la aplicación consecutiva de la ley del paralelogramo o mediante la consecuente regla del polígono para obtener la resultante en forma gráfica, como ya se ha visto.

Otra forma de utilizar la ley del paralelogramo, de uso más práctico, para determinar la resultante de un sistema de fuerzas en el plano consiste en descomponer primero las fuerzas en sus componentes rectangulares, según los ejes x y y, y sumar después las respectivas componentes, para hallar las resultantes R_x y R_y en cada uno de dichos ejes y obtener finalmente la resultante $\vec{\boldsymbol{R}}$.

Considere una partícula A sometida a tres fuerzas $\vec{\boldsymbol{F}}_1$, $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{F}}_3$, como se ilustra en la figura 2.15(a), la resultante $\vec{\boldsymbol{R}}$ equivalente se puede expresar como:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \vec{\boldsymbol{F}}_3$$

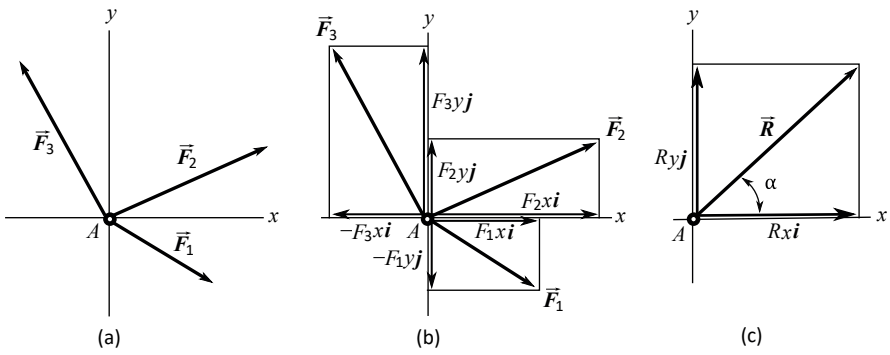


Figura 2.15

Al descomponer cada fuerza en sus componentes rectangulares según los ejes x y y, se obtiene:

$$R_x\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} = F_{1x}\boldsymbol{i} - F_{1y}\boldsymbol{j} + F_{2x}\boldsymbol{i} + F_{2y}\boldsymbol{j} - F_{3x}\boldsymbol{i} + F_{3y}\boldsymbol{j}$$
$$= (F_{1x} + F_{2x} - F_{3x})\boldsymbol{i} + (-F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})\boldsymbol{j}$$

$$R_x = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} - F_{3x} \tag{2.13}$$

$$R_y = \sum F_y = -F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \tag{2.14}$$

Se observa, en las relaciones 2.13 y 2.14, que las componentes R_x y R_y de la resultante $\vec{\boldsymbol{R}}$ se obtienen mediante la suma algebraica de las componentes escalares de cada una de las fuerzas, según los ejes x y y, respectivamente. La magnitud de la resultante y el ángulo formado con el eje x, de acuerdo con la figura 2.15(c), se obtiene así:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{2.15}$$

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \qquad \alpha = tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \tag{2.16}$$

2.11.1 Ejemplo 2.4

El cáncamo de la figura 2.16(a) soporta la tensión de tres cables $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ y $\vec{T}_3$, como se muestra. Si las magnitudes de las tres tensiones son iguales a 120 N, determinar la magnitud y la dirección de la resultante utilizando: *a*) la ley del paralelogramo y *b*) la suma de fuerzas por adición de componentes.

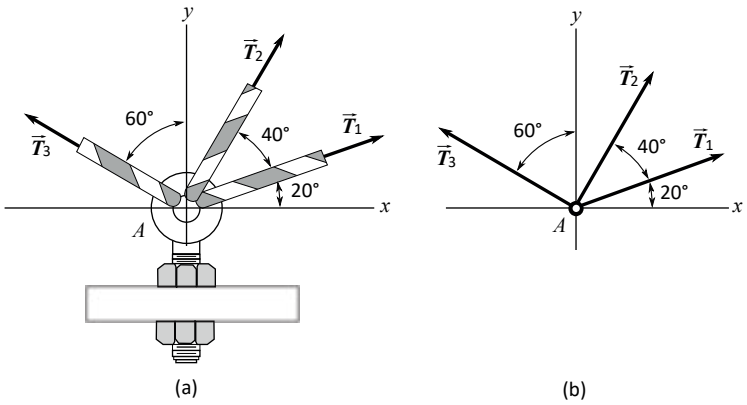


Figura 2.16

Solución (a)

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la partícula *A*, el cual se indica en la figura 2.16(b). Se suman inicialmente dos tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$, como se ilustra en la figura 2.17(a), para determinar una resultante $\vec{R}_1$ mediante la ley del paralelogramo, y posteriormente se aplica la ley de los senos para definir los ángulos α y β, así:

$$R_1^2 = (120\text{ N})^2 + (120\text{ N})^2 - 2(120\text{ N})(120\text{ N})\,cos\,140° \quad R_1 = 225.52\text{ N}$$

$$\frac{R_1}{sen\,140°} = \frac{T_1}{sen\,\beta} = \frac{T_2}{sen\,\alpha} \qquad \frac{225.52\text{ N}}{sen\,140°} = \frac{120\text{ N}}{sen\,\beta} = \frac{120\text{ N}}{sen\,\alpha} \qquad \alpha = \beta = 20°$$

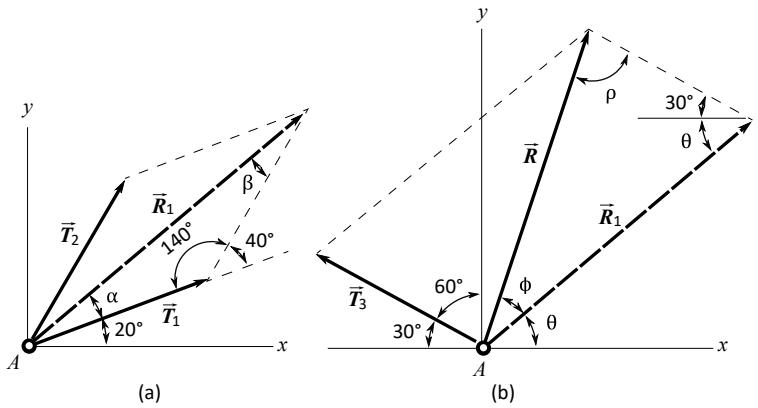


Figura 2.17

El ángulo θ, el cual forma $\vec{R}_1$ con el eje x, de acuerdo con la figura 2.17(a), es:

$$\theta = 20° + \alpha = 20° + 20° = 40°$$

Se traza ahora un nuevo paralelogramo con la resultante $\vec{R}_1$ y la tensión $\vec{T}_3$, como se indica en la figura 2.17(b), para obtener una resultante $\vec{R}$ definitiva, cuya magnitud se calcula al aplicar de nuevo la ley de los cosenos y los ángulos ϕ y ρ, por medio de la ley de los senos, así:

$$R^2 = (225.52\ \text{N})^2 + (120\ \text{N})^2 - 2(225.52\ \text{N})(120\ \text{N})\ cos\ (30° + \theta) \quad \boldsymbol{R = 216.21\ N}$$

Resultando: $\phi = 31.44°$ y $\rho = 78.56°$. Entonces, el ángulo formado por la resultante $\vec{R}$ con el eje x, según la figura 2.17(b), es:

$$(\boldsymbol{\phi + \theta}) = (\mathbf{31.44° + 40°}) = \mathbf{71.44°}$$

Solución (b)

Se elabora inicialmente el diagrama de cuerpo libre de la partícula A, mostrado en la figura 2.16(b), y se expresan todas las fuerzas en forma de componentes:

$$\vec{T}_1 = (120\ \text{N})\ cos\ 20°\boldsymbol{i} + (120\ \text{N})\ sen\ 20°\boldsymbol{j}$$
$$\vec{T}_2 = (120\ \text{N})\ cos\ 60°\boldsymbol{i} + (120\ \text{N})\ sen\ 60°\boldsymbol{j}$$
$$\vec{T}_3 = -(120\ \text{N})\ cos\ 30°\boldsymbol{i} + (120\ \text{N})\ sen\ 30°\boldsymbol{j}$$
$$\vec{R} = R_x\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j}$$

Se aplican las relaciones 2.13 y 2.14 para hallar las resultantes según los ejes x y y, así:

$$R_x = (120\ \text{N})\ cos\ 20° + (120\ \text{N})\ cos\ 60° - (120\ \text{N})\ cos\ 30° = 68.84\ \text{N}$$

$$R_y = (120\ \text{N})\ sen\ 20° + (120\ \text{N})\ sen\ 60° + (120\ \text{N})\ sen\ 30° = 204.96\ \text{N}$$

Y teniendo en cuenta las expresiones 2.15 y 2.16, se determinan la magnitud y la dirección de la resultante:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(68.84\ \text{N})^2 + (204.96\ \text{N})^2} = 216.21\ \text{N} \quad \boldsymbol{R = 216.21\ \text{N}}$$

$$tan\ (\phi + \theta) = \frac{204.96\ \text{N}}{68.84\ \text{N}} \quad \boldsymbol{(\phi + \theta) = 71.44°}$$

Como era de esperarse, por ambos métodos se obtiene el mismo resultado, aunque con la ventaja de que el procedimiento por adición de componentes es más práctico y rápido.

2.12 Equilibrio de una partícula en el plano

La primera ley de Newton se enuncia de la siguiente manera: *si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a cero, la partícula permanecerá en reposo si inicialmente estaba en reposo o se moverá con rapidez constante si inicialmente estaba en movimiento*. Cuando una partícula se encuentra en reposo o en movimiento uniforme, se dice que está en equilibrio, bien sea estático, en el primer caso, bien sea dinámico, en el segundo.

Para el estudio de la estática, el enunciado anterior significa que si la resultante de todas las fuerzas aplicadas a una partícula es igual a cero, la partícula estará en equilibrio, lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \sum \vec{\boldsymbol{F}} = 0 \tag{2.17}$$

Al descomponer las fuerzas en sus componentes según los ejes x y y, resulta:

$$\left(\sum F_x\right)\boldsymbol{i} + \left(\sum F_y\right)\boldsymbol{j} = 0 \tag{2.18}$$

La ecuación 2.18 se satisface al igualar a cero la sumatoria de las componentes según cada uno de los ejes x y y, así:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \tag{2.19}$$

La expresión 2.19 determina las condiciones requeridas para que una partícula se encuentre en equilibrio bajo la acción de fuerzas contenidas en el plano y, dado que cuenta con dos ecuaciones, es posible resolver un máximo de dos incógnitas o escalares. Con base en lo anterior, se afirma lo siguiente:

— Si una partícula *A* sometida a dos fuerzas está en equilibrio, las dos fuerzas tendrán la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos, lo cual se ilustra en la figura 2.18(a).
— Si una partícula *A* sometida a tres fuerzas se encuentra en equilibrio, dichas fuerzas formarán un triángulo cerrado, tal como se indica en la figura 2.18(b). Asimismo, por extensión, se puede afirmar que si son más de tres fuerzas las que intervienen, estas formarán un polígono cerrado.

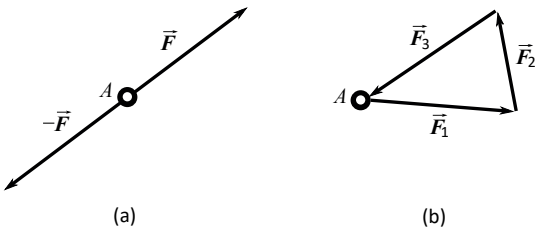


Figura 2.18

En un triángulo o polígono cerrado de fuerzas, la coincidencia del extremo de la última fuerza con el inicio de la primera significa que la resultante es nula, razón por la cual se afirma el estado de equilibrio.

El siguiente es básicamente el procedimiento para resolver problemas de equilibrio de la partícula en el plano:

1. Elaborar un diagrama de cuerpo libre, que consiste en aislar la partícula en cuestión y dibujarla con todas las fuerzas que actúan sobre ella.
2. Expresar cada una de las fuerzas en forma de componentes rectangulares según los ejes *x* y *y*.
3. Aplicar las ecuaciones de equilibrio, dadas mediante la relación 2.19, teniendo en cuenta que es posible resolver como máximo dos incógnitas.

2.12.1 Ejemplo 2.5

Un peso de 100 lb se mantiene suspendido mediante dos cuerdas *AB* y *AC*, como se muestra en la figura 2.19(a). Encontrar las magnitudes de las tensiones en cada una de las cuerdas.

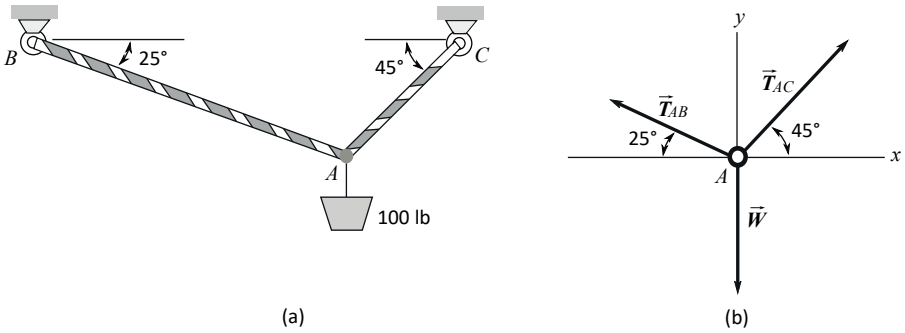


Figura 2.19

Solución

Se elabora el diagrama de cuerpo libre de la partícula *A*, mostrado en la figura 2.19(b), siendo las incógnitas las magnitudes de las tensiones T_{AB} y T_{AC} de las cuerdas. Seguidamente se expresan las fuerzas en forma de componentes rectangulares, según los ejes *x* y *y*, teniendo en cuenta el correspondiente signo de cada componente escalar de acuerdo con lo visto en la sección 2.10, así:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = -(T_{AB})\,cos\,25°\boldsymbol{i} + (T_{AB})\,sen\,25°\boldsymbol{j}$$
$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AC} = +(T_{AC})\,cos\,45°\boldsymbol{i} + (T_{AC})\,sen\,45°\boldsymbol{j}$$
$$\vec{\boldsymbol{W}} = -(100\text{ lb})\boldsymbol{j}$$

Se aplican las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0: \; -(T_{AB})\,cos\,25° + (T_{AC})\,cos\,45° = 0$$
$$-0.906(T_{AB}) + 0.707(T_{AC}) = 0 \qquad (1)$$
$$\sum F_y = 0: \; +(T_{AB})\,sen\,25° + (T_{AC})\,sen\,45° - 100\text{ lb} = 0$$
$$+0.422(T_{AB}) + 0.707(T_{AC}) = 100\text{ lb} \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2, el resultado es:

$$\boldsymbol{T_{AB} = +75.30\text{ lb} \quad T_{AC} = +96.49\text{ lb}}$$

Como las magnitudes de las tensiones T_{AB} y T_{AC} se consideran cantidades positivas y dado que en los resultados se obtuvieron signos positivos, lo anterior indica que los sentidos supuestos para los vectores correspondientes $\vec{T}_{AB}$ y $\vec{T}_{AC}$ fueron los correctos.

Solución mediante el triángulo de fuerzas

En la sección anterior se expresó que si una partícula sometida a tres fuerzas se encuentra en equilibrio, dichas fuerzas formarán un triángulo cerrado, por lo tanto, las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.19(b) son colocadas como se aprecia en la figura 2.20(a).

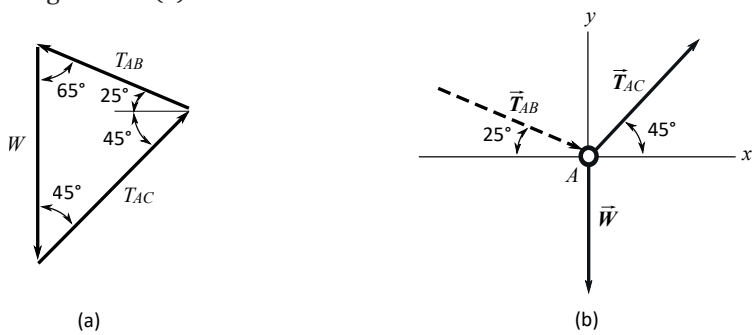


Figura 2.20

Se asignan los valores correspondientes de los ángulos internos y se aplica la ley de los senos para encontrar las magnitudes T_{AB} y T_{AC}, así:

$$\frac{(T_{AB})}{sen\ 45°} = \frac{100\ \text{lb}}{sen\ 70°} \qquad T_{AB} = \frac{(100\ \text{lb})\ sen\ 45°}{sen\ 70°} = 75.24\ \text{lb}$$

$$\frac{(T_{AC})}{sen\ 65°} = \frac{100\ \text{lb}}{sen\ 70°} \qquad T_{AC} = \frac{(100\ \text{lb})\ sen\ 65°}{sen\ 70°} = 96.44\ \text{lb}$$

$$\boldsymbol{T_{AB} = +75.24\ \text{lb} \quad T_{AC} = +96.44\ \text{lb}}$$

Las aproximaciones presentadas en los resultados son debidas al manejo de las cifras significativas.

Solución con sentido incierto para $\vec{T}_{AB}$

Si no se tiene seguridad del sentido de una fuerza, como en el supuesto caso de $\vec{T}_{AB}$ mostrado en la figura 2.20(b), se elabora el diagrama de cuerpo libre de la partícula A y se dibuja dicha fuerza con trazos discontinuos, para indicar que no se conoce su sentido, por lo que al final deberá ser corregido si presenta signo negativo en el resultado de su magnitud. Entonces, se expresan las fuerzas en forma de componentes rectangulares, así:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = +(T_{AB})\, cos\, 25°\boldsymbol{i} - (T_{AB})\, sen\, 25°\boldsymbol{j}$$
$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AC} = +(T_{AC})\, cos\, 45°\boldsymbol{i} + (T_{AC})\, sen\, 45°\boldsymbol{j}$$
$$\vec{\boldsymbol{W}} = -(100\text{ lb})\boldsymbol{j}$$

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0:\ (T_{AB})\, cos\, 25° + (T_{AC})\, cos\, 45° = 0$$
$$+0.906(T_{AB}) + 0.707(T_{AC}) = 0 \qquad (3)$$
$$\sum F_y = 0:\ -(T_{AB})\, sen\, 25° + (T_{AC})\, sen\, 45° - 100\text{ lb} = 0$$
$$-0.422(T_{AB}) + 0.707(T_{AC}) = 100\text{ lb} \qquad (4)$$

Al resolver las relaciones 3 y 4:

$$\boldsymbol{T_{AB} = -75.30\text{ lb}}$$

En donde el signo negativo indica que el sentido correcto es opuesto al escogido inicialmente. Se sustituye T_{AB}, con el respectivo signo, en la ecuación 3, para hallar T_{AC}, así:

$$+0.906(-75.30\text{ lb}) + 0.707(T_{AC}) = 0$$

Por lo que al despejar:

$$\boldsymbol{T_{AC} = +96.49\text{ lb}}$$

Una vez corregido el sentido de T_{AB}, acorde con la figura 2.19(b), la respuesta definitiva es:

$$\boldsymbol{T_{AB} = +75.30\text{ lb}}$$

2.13 Sistema de coordenadas y vectores de posición

Para definir la posición de un punto cualquiera *A* en el espacio, se usará en este texto un sistema de coordenadas cartesiano denominado *derecho,* por ser compatible con los resultados obtenidos al aplicar la regla de la mano derecha, en lo referente al producto vectorial, que será utilizado más adelante.

Para tales efectos se tomarán los ejes *x* y *y* en las mismas posiciones usadas hasta ahora, o sea el eje en forma vertical y el eje *x* horizontal, mientras que el eje *z* se representará en forma inclinada, como se aprecia en la figura 2.21(a).

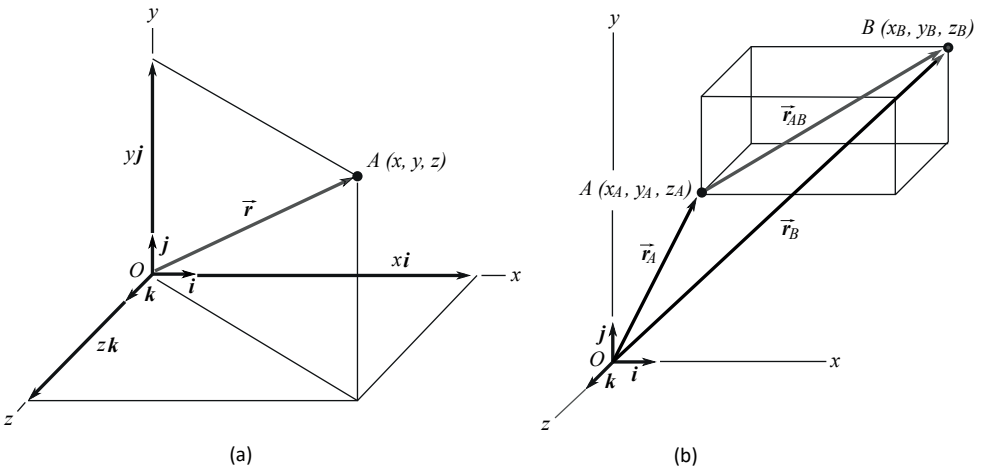


Figura 2.21

Como extensión al uso de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$, tratados en la sección 2.10, para representar las direcciones de las componentes de una fuerza, según los ejes x y y, respectivamente, se incluye ahora el vector unitario $\boldsymbol{k}$ para expresar la dirección de la componente según el eje z, los cuales son mostrados en la figura 2.21(a), completando los tres vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ requeridos para el sistema tridimensional xyz.

Si se define un punto A en el espacio con coordenadas (x, y, z), como se indica en la figura 2.21(a), el vector tomado desde el origen O del sistema de coordenadas hasta el punto A es denominado vector de posición de A y se designa por $\vec{\boldsymbol{r}}$. El vector de posición se caracteriza porque sus componentes rectangulares coinciden con las coordenadas cartesianas del punto A, o sea:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{2.20}$$

En términos generales, para representar el vector dirigido desde un punto A hasta un punto B en el espacio, se utiliza el vector de posición de B con respecto a A, mostrado en la figura 2.21(b), designado como $\vec{\boldsymbol{r}}_{AB}$, el cual se expresa en términos de las coordenadas de los puntos A y B, así:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{r}}_A &= x_A\boldsymbol{i} + y_A\boldsymbol{j} + z_A\boldsymbol{k} \qquad \vec{\boldsymbol{r}}_B = x_B\boldsymbol{i} + y_B\boldsymbol{j} + z_B\boldsymbol{k} \\ \vec{\boldsymbol{r}}_{AB} &= \vec{\boldsymbol{r}}_B - \vec{\boldsymbol{r}}_A = (x_B\boldsymbol{i} + y_B\boldsymbol{j} + z_B\boldsymbol{k}) - (x_A\boldsymbol{i} + y_A\boldsymbol{j} + z_A\boldsymbol{k}) \\ \vec{\boldsymbol{r}}_{AB} &= (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2.21}$$

En ciertas ocasiones es conveniente hallar un vector unitario $\vec{\lambda}_{AB}$ en la dirección del vector de posición relativo $\vec{r}_{AB}$, el cual está determinado al dividirlo sobre su magnitud, así:

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{(x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \tag{2.22}$$

Se debe recordar la relación 2.1, la cual define el vector unitario $\vec{u}$ como el cociente entre un vector $\vec{V}$ y su magnitud V, así: $\vec{u} = \vec{V}/V$.

2.14 Representación cartesiana de una fuerza en el espacio

En la sección 2.10 se hallaron las correspondientes componentes rectangulares $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ de una fuerza $\vec{F}$ según los ejes x y y, mediante la ley del paralelogramo. Ahora ampliaremos su uso para encontrar las componentes rectangulares $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ y $\vec{F}_z$ de dicha fuerza $\vec{F}$, según los ejes x, y y z, respectivamente.

Considere una fuerza $\vec{F}$ aplicada en el origen O de un sistema de coordenadas xyz, como se muestra en la figura 2.22(a). Por el extremo de $\vec{F}$, o punto B, se trazan dos rectas: una BC, paralela al plano xz, la cual es perpendicular al eje y en el punto C, y otra BA, paralela al eje y, perpendicular al plano xz en el punto A, para formar el paralelogramo $OABC$, en donde $\vec{F}$ es su diagonal. Como el paralelogramo $OABC$ es un rectángulo, las fuerzas así definidas: una $\vec{F}_y$, sobre el eje y, y otra $\vec{F}_{OA}$, según la línea OA, resultan ser componentes rectangulares de $\vec{F}$, lo cual se puede expresar así:

$$\vec{F} = \vec{F}_{OA} + \vec{F}_y \tag{2.23}$$

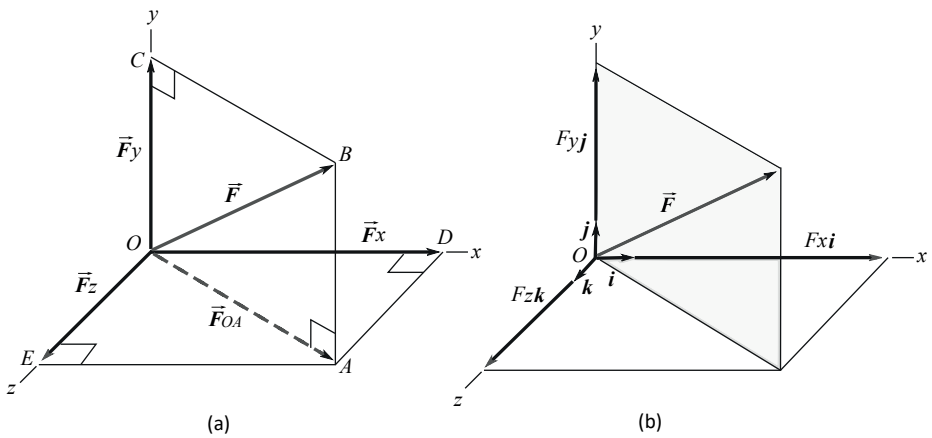


Figura 2.22

Ahora, por el extremo de $\vec{F}_{OA}$, o punto *A*, se dibujan dos líneas: una *AD*, paralela al eje *z*, y otra *AE*, paralela al eje *x*, para formar un paralelogramo, como se indica en la figura 2.22(a), que es a su vez un rectángulo, siendo $\vec{F}_{OA}$ su diagonal, quedando determinadas las componentes rectangulares $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_z$, lo cual se enuncia así:

$$\vec{F}_{OA} = \vec{F}_x + \vec{F}_z \tag{2.24}$$

Al reemplazar $\vec{F}_{OA}$, en la relación 2.23, resulta:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \tag{2.25}$$

Se ha descompuesto la fuerza $\vec{F}$, como se ilustra en la figura 2.22(a), en tres componentes rectangulares $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ y $\vec{F}_z$, según las direcciones de los ejes *x, y* y *z*, respectivamente. Al expresar $\vec{F}$ en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$, como se muestra en la figura 2.22(b), queda así:

$$\vec{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \tag{2.26}$$

Siendo F_x, F_y y F_z las componentes escalares de $\vec{F}$, para las cuales F_x es positiva si $\vec{F}_x$ tiene el mismo sentido que el eje positivo de las *x*, y negativa si tiene el sentido opuesto; asimismo, la componente escalar F_y es positiva o negativa de acuerdo con el sentido de $\vec{F}_y$, hacia arriba o hacia abajo, respectivamente, y además F_z es positiva si $\vec{F}_z$ apunta hacia el lado positivo del eje *z* y negativa si tiene el sentido contrario.

Por otro lado, en relación con la figura 2.22(a) se observa que el triángulo *OAB* es rectángulo, en donde *F*, la magnitud de $\vec{F}$, es la hipotenusa, F_y y F_{OA}, las respectivas magnitudes de $\vec{F}_y$ y $\vec{F}_{OA}$, los catetos, por lo que al aplicar el teorema de Pitágoras se tiene:

$$F^2 = F_y^2 + F_{OA}^2 \tag{2.27}$$

Además, teniendo en cuenta que el triángulo *ODA* es rectángulo, siendo F_{OA}, la magnitud de $\vec{F}_{OA}$, la hipotenusa, F_x y F_z, las respectivas magnitudes de $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_z$, los catetos, entonces al aplicar nuevamente el teorema de Pitágoras resulta:

$$F_{OA}^2 = F_x^2 + F_z^2 \tag{2.28}$$

Sustituyendo la ecuación 2.28 en 2.27, tenemos:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \tag{2.29}$$

Si se designan como θ_x, θ_y y θ_z los respectivos ángulos entre la fuerza $\vec{F}$ y las componentes $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ y $\vec{F}_z$, como se aprecia en las figuras 2.23(a), 2.23(b) y 2.24(a), y dado que $\vec{F}$ es la hipotenusa común, en relación con los triángulos rectángulos *ODB*, *OCB* y *OEB*, en donde $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ y $\vec{F}_z$ son los correspondientes catetos adyacentes, entonces las relaciones entre las componentes escalares F_x, F_y y F_z y la magnitud *F* de $\vec{F}$ están dadas por:

$$F_x = F\cos\theta_x \quad F_y = F\cos\theta_y \quad F_z = F\cos\theta_z \tag{2.30}$$

Al reemplazar las relaciones 2.30 en la ecuación 2.26, se obtiene:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = F\cos\theta_x\boldsymbol{i} + F\cos\theta_y\boldsymbol{j} + F\cos\theta_z\boldsymbol{k} \tag{2.31}$$

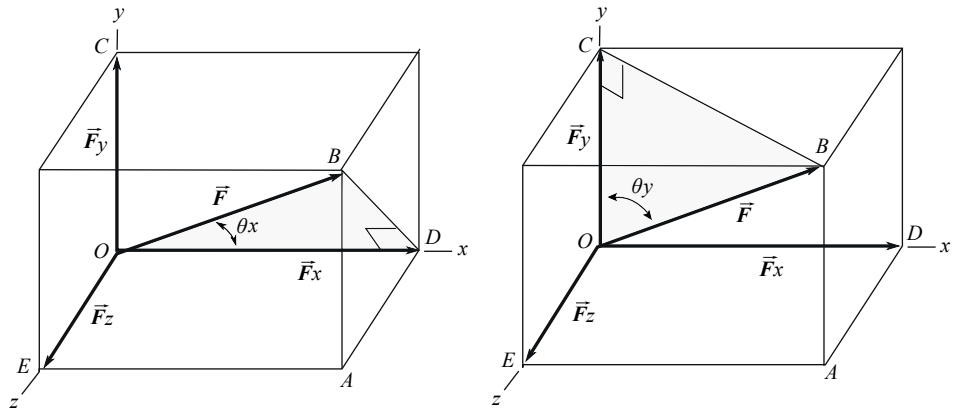


Figura 2.23

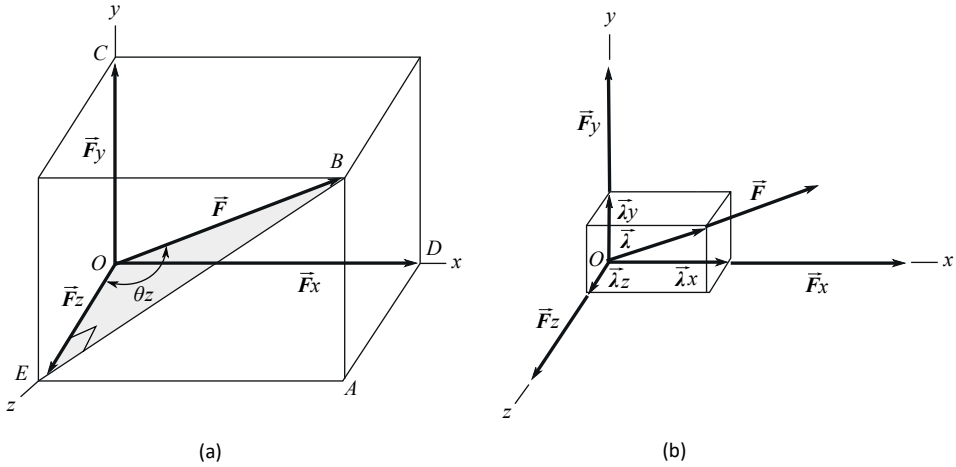


Figura 2.24

Las expresiones $cos\ \theta_x$, $cos\ \theta_y$ y $cos\ \theta_z$ se denominan *cosenos directores* de $\vec{\boldsymbol{F}}$ debido a que definen completamente la dirección de $\vec{\boldsymbol{F}}$ en el espacio.

Expresando la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ en términos de su magnitud y el vector unitario $\vec{\boldsymbol{\lambda}}$, como se muestra en la figura 2.24(b), se da:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\lambda}} F \tag{2.32}$$

Y al comparar las ecuaciones 2.31 y 2.32, el vector unitario $\vec{\boldsymbol{\lambda}}$ queda así:

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}} = cos\ \theta_x \boldsymbol{i} + cos\ \theta_y \boldsymbol{j} + cos\ \theta_z \boldsymbol{k} \tag{2.33}$$

Al expresar en forma de componentes escalares:

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}} = \lambda_x \boldsymbol{i} + \lambda_y \boldsymbol{j} + \lambda_z \boldsymbol{k}$$

$$\lambda_x = cos\ \theta_x \quad \lambda_y = cos\ \theta_y \quad \lambda_z = cos\ \theta_z \tag{2.34}$$

Teniendo en cuenta que la magnitud del vector $\vec{\boldsymbol{\lambda}}$ es igual a 1, resulta válido lo siguiente:

$$cos\ \theta_x^2 + cos\ \theta_y^2 + cos\ \theta_z^2 = 1$$

La ecuación anterior establece la relación entre sí de los cosenos directores de una fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ en el espacio.

2.15 Fuerza definida por su magnitud y su dirección

Algunos problemas que tratan sobre fuerzas en el espacio plantean la necesidad de expresarlas vectorialmente con base en su magnitud y su dirección. Tales son los casos que involucran cuerpos o partículas sometidas a la tensión de cables, como la partícula *A* de la torre *AO*, mostrada en la figura 2.25, en donde la situación general es la de fuerzas cuyas direcciones se pueden deducir de la disposición geométrica de los elementos del diagrama espacial, para lo cual se presentan dos casos, así:

1. Se conocen las coordenadas de dos puntos *A* y *B*, pertenecientes a la línea de acción de la fuerza o tensión, como se aprecia en la figura 2.25(a).
2. Se cuenta con los valores de dos ángulos, como se indica en la figura 2.25(b): uno en el plano vertical, denominado α, y otro en el plano horizontal, o ángulo β, con los cuales es posible determinar la dirección de la fuerza o tensión.

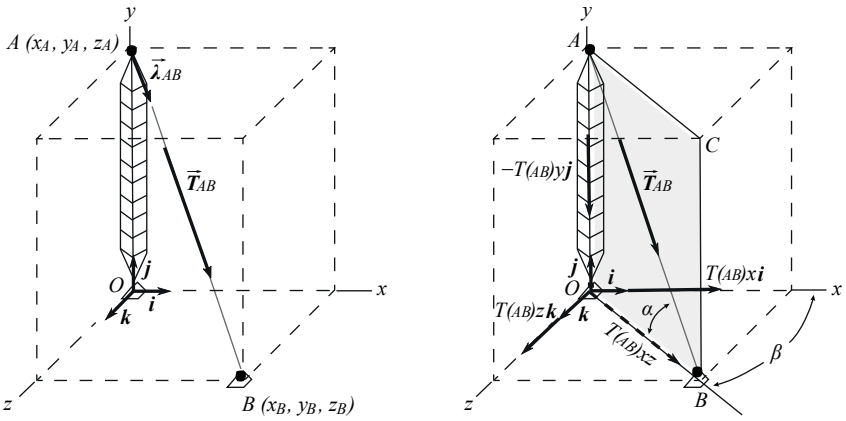


Figura 2.25

Para solucionar el primer caso se observa que los puntos *A* y *B*, cuyas coordenadas son conocidas, corresponden al vector de posición relativo de *B* con respecto *A*, de acuerdo con lo visto en la sección 2.13, por tanto, su respectivo vector unitario está dado mediante la expresión 2.22, así:

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB} = \frac{(x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Los puntos *A* y *B* son comunes a la línea de acción de la tensión $\vec{\boldsymbol{T}}_{AB}$, por tanto, se puede expresar en términos de su magnitud T_{AB} y del vector unitario $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB}$, así:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB} T_{AB} \tag{2.35}$$

En cuanto al segundo caso y teniendo en cuenta que la tensión $\vec{\boldsymbol{T}}_{AB}$ de magnitud T_{AB}, la cual se encuentra contenida en el plano vertical *OACB*, como se indica en la figura 2.25(b), presenta dos componentes escalares, una según el eje *y* o $(T_{AB})_y$ y otra en la dirección *OB* o $(T_{AB})_{xz}$, dadas así:

$$(T_{AB})_y = -(T_{AB})\ sen\ \alpha \qquad (T_{AB})_{xz} = (T_{AB})\ cos\ \alpha$$

A su vez, $(T_{AB})_{xz}$ se descompone de acuerdo con los ejes *x* y *z*, así:

$$(T_{AB})_X = +(T_{AB})\ cos\ \alpha\ cos\ \beta \qquad (T_{AB})_z = (T_{AB})\ cos\ \alpha\ sen\ \beta$$

Obteniéndose las tres componentes de $\vec{\boldsymbol{T}}_{AB}$, según los ejes *x, y* y *z*, para ser reemplazadas en la siguiente expresión:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = (T_{AB})_x\boldsymbol{i} + (T_{AB})_y\boldsymbol{j} + (T_{AB})_z\boldsymbol{k} \tag{2.36}$$

2.15.1 Ejemplo 2.6

La línea de acción de una fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}_{AB}$ de magnitud 210 N pasa por los puntos de coordenadas *A* (10, 12, −4) y *B* (4, −6, 5), como se indica en la figura 2.26. Expresar la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}_{AB}$ aplicada en el punto *A*, en forma de componentes rectangulares según los ejes *x, y* y *z*.

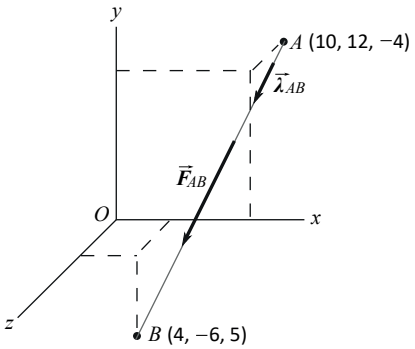


Figura 2.26

Solución

Los valores de las coordenadas de los puntos, *A* (10, 12, −4) y *B* (4, −6, 5), se reemplazan en la relación 2.22 para determinar el vector unitario $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB}$, el cual define la dirección de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}_{AB}$, conforme a la figura 2.26, así:

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB} = \frac{(x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB} = \frac{(4-10)\boldsymbol{i} + (-6-12)\boldsymbol{j} + (5-(-4))\boldsymbol{k}}{\sqrt{(4-10)^2 + (-6-12)^2 + (5-(-4))^2}} = \frac{-6\boldsymbol{i} - 18\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}}{21} \qquad \vec{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{AB}} = \frac{\boldsymbol{-6i - 18j + 9k}}{\boldsymbol{21}}$$

Se sustituyen valores en la ecuación 2.35 tomando F_{AB} = 210 N, como la magnitud de $\vec{\boldsymbol{F}}_{AB}$, así:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{AB} = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB}F_{AB} = \left(\frac{-6\boldsymbol{i} - 18\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}}{21}\right)(210\text{ N}) = -(60\text{ N})\boldsymbol{i} - (180\text{ N})\boldsymbol{j} + (90\text{ N})\boldsymbol{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{-(60\text{ N})i - (180\text{ N})j + (90\text{ N})k}$$

2.15.2 Ejemplo 2.7

Un cable *AB* es utilizado para sostener una tubería, como se ilustra en la figura 2.27, al aplicarle una tensión de 100 N. Expresar la tensión del cable *AB*, aplicada en *A*, en forma vectorial.

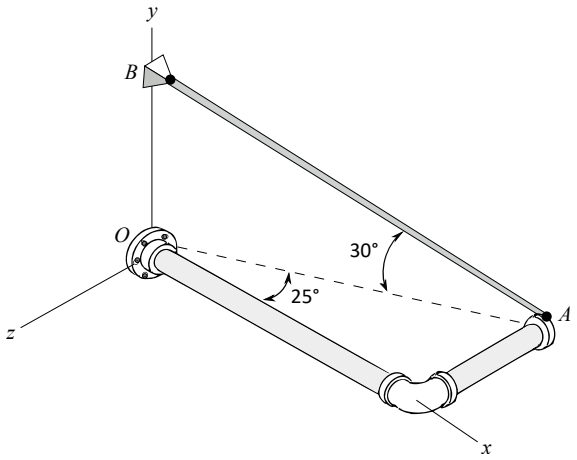


Figura 2.27

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la partícula *A*, a la cual se le aplica la tensión $\vec{T}_{AB}$, como se muestra en la figura 2.28. Se observa que la tensión $\vec{T}_{AB}$ se encuentra contenida en el plano vertical *OACB*, formando un ángulo de 30° con la línea horizontal *OA*, de la cual se obtienen dos componentes escalares, al sustituir la magnitud T_{AB} = 100 N, así:

$$(T_{AB})_y = (T_{AB})\, sen\, 30° = 50\,\text{N} \qquad (T_{AB})_{xz} = (T_{AB})\, cos\, 30° = 86.6\,\text{N}$$

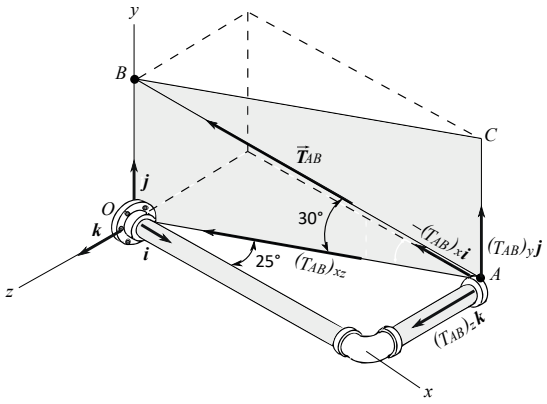


Figura 2.28

De la componente $(T_{AB})_{xz}$ se derivan las componentes escalares, según los ejes x y z, respectivamente, así:

$$(T_{AB})_x = -(T_{AB})_{xz}\, cos\, 25° = -(86.6\text{ N})\, cos\, 25° = -78.48\text{ N}$$
$$(T_{AB})_z = (T_{AB})_{xz}\, sen\, 25° = (86.6\text{ N})\, sen\, 25° = 36.6\text{ N}$$

La relación 2.36 expresa la tensión en forma vectorial en términos de sus componentes rectangulares según los ejes *x, y* y *z*, así:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = (T_{AB})_x\boldsymbol{i} + (T_{AB})_y\boldsymbol{j} + (T_{AB})_z\boldsymbol{k}$$

Al reemplazar los valores correspondientes, se tiene:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{AB}} = -(\mathbf{78.48\text{ N}})\boldsymbol{i} + (\mathbf{50\text{ N}})\boldsymbol{j} + (\mathbf{36.6\text{ N}})\boldsymbol{k}$$

2.16 Equilibrio de una partícula en el espacio

En la sección 2.12 se declaró la primera ley de Newton, en donde se establecen las condiciones de equilibrio para una partícula en el plano, lo cual, en términos generales, se expresa mediante la relación 2.17, dada así:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \sum\vec{\boldsymbol{F}} = 0$$

Al descomponer las fuerzas en sus componentes, según los ejes *x, y* y *z*, para una partícula bajo fuerzas en tres dimensiones e igualarlas a cero, la sumatoria según cada uno de dichos ejes se obtiene así:

$$(\sum F_x)\boldsymbol{i} + (\sum F_y)\boldsymbol{j} + (\sum F_z)\boldsymbol{k} = 0 \qquad (2.37)$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \qquad (2.38)$$

Dadas las relaciones 2.38, y teniendo en cuenta los pasos contemplados en la sección 2.12 para la solución de problemas de equilibrio en el plano, solo falta adicionar la condición relacionada con el eje *z*, para completar el equilibrio en los tres ejes, por lo tanto, el procedimiento para resolver problemas de equilibrio de la partícula en el espacio se indica a continuación:

1. Elaborar un diagrama de cuerpo libre, que consiste en dibujar la partícula con todas las fuerzas que actúan sobre ella.
2. Expresar cada una de las fuerzas en forma de componentes según los ejes *x, y* y *z*, o sea en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.
3. Aplicar las ecuaciones de equilibrio dadas mediante la relación 2.38, teniendo en cuenta que se pueden resolver hasta tres incógnitas.

2.16.1 Ejemplo 2.8

Un peso de 120 N es sostenido mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD*, unidos al techo en los puntos *B*, *C* y *D*, como se indica en la figura 2.29(a). Hallar la magnitud de la tensión en cada cable.

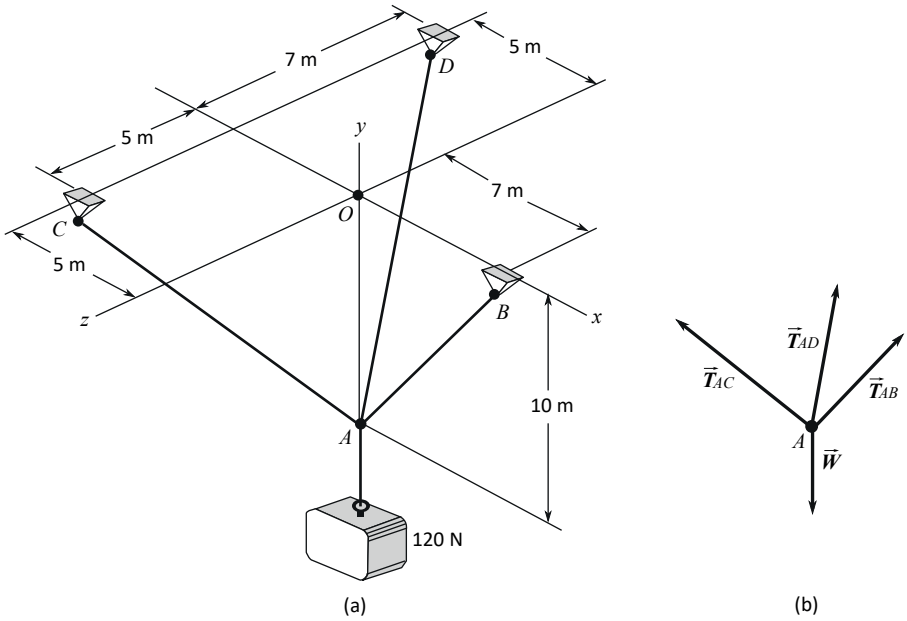


Figura 2.29

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la partícula *A*, el cual se muestra en la figura 2.29(b), y se expresa cada fuerza en forma de componentes según los ejes *x, y* y *z*, para lo cual se determinan primeramente las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, con el fin de hallar los vectores unitarios correspondientes, al aplicar la relación 2.22, así:

$$A\ (0,-10,0)\ [\text{m}] \quad B\ (7,0,0)\ [\text{m}] \quad C\ (-5,0,5)\ [\text{m}] \quad D\ (-5,0,-7)\ [\text{m}]$$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB} = \frac{(7-0)\boldsymbol{i} + (0-(-10))\boldsymbol{j} + (0-0)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(7-0)^2 + (0-(-10))^2 + (0-0)^2}} = \frac{7\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j}}{12.20}$$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AC} = \frac{(-5-0)\boldsymbol{i} + (0-(-10))\boldsymbol{j} + (5-0)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-5-0)^2 + (0-(-10))^2 + (5-0)^2}} = \frac{-5\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}}{12.24}$$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AD} = \frac{(-5-0)\boldsymbol{i} + (0-(-10))\boldsymbol{j} + (-7-0)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-5-0)^2 + (0-(-10))^2 + (-7-0)^2}} = \frac{-5\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}}{13.19}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB}(T_{AB}) \qquad \vec{\boldsymbol{T}}_{AC} = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AC}(T_{AC}) \qquad \vec{\boldsymbol{T}}_{AD} = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AD}(T_{AD})$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = 0.573(T_{AB})\boldsymbol{i} + 0.819(T_{AB})\boldsymbol{j}$$
$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AC} = -0.408(T_{AC})\boldsymbol{i} + 0.816(T_{AC})\boldsymbol{j} + 0.408(T_{AC})\boldsymbol{k}$$
$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AD} = -0.379(T_{AD})\boldsymbol{i} + 0.758(T_{AD})\boldsymbol{j} - 0.530(T_{AD})\boldsymbol{k}$$
$$\vec{\boldsymbol{W}} = -(120\ \text{N})\boldsymbol{j}$$

Se aplican las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0:\ 0.573(T_{AB}) - 0.408(T_{AC}) - 0.379(T_{AD}) = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0:\ 0.819(T_{AB}) + 0.816(T_{AC}) + 0.758(T_{AD}) - 120\ \text{N} = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_z = 0:\ 0.408(T_{AC}) - 0.530(T_{AD}) = 0 \tag{3}$$

De la ecuación 3 se despeja T_{AC} para obtener:

$$0.408T_{AC} = 0.530T_{AD} \quad T_{AC} = \left(\frac{0.530}{0.408}\right) = 1.3T_{AD} \tag{4}$$

Se reemplaza T_{AC} en las ecuaciones 1 y 2, quedando:

$$T_{AC}\ \text{en 1:}\ 0.573(T_{AB}) - 0.408(1.3T_{AD}) - 0.379(T_{AD}) = 0$$
$$0.573(T_{AB}) - 0.909(T_{AD}) = 0 \tag{5}$$

$$T_{AC}\ \text{en 2:}\ 0.819(T_{AB}) + 0.816(1.3T_{AD}) + 0.758(T_{AD}) - 120\ \text{N} = 0$$
$$0.819(T_{AB}) + 1.818(T_{AD}) = 120\ \text{N} \tag{6}$$

Se multiplican las ecuaciones 5 y 6, así:

$$5 \times (1.818):\ 1.041(T_{AB}) - 1.652(T_{AD}) = 0 \tag{7}$$

$$6 \times (0.909):\ 0.744(T_{AB}) + 1.652(T_{AD}) = 109.08\ \text{N} \tag{8}$$

Se suman las expresiones 7 y 8, para eliminar T_{AD}, y se despeja T_{AB}:

$$1.785(T_{AB}) = 109.08 \text{ N} \quad \boldsymbol{T_{AB} = 61.10 \text{ N}}$$

Se sustituye T_{AB} en la relación 7 y se despeja T_{AD}:

$$1.652(T_{AD}) = 63.605 \text{ N} \quad \boldsymbol{T_{AD} = 38.50 \text{ N}}$$

Se reemplaza T_{AD} en la ecuación 4 para obtener T_{AC}:

$$T_{AC} = 1.3T_{AD} \quad \boldsymbol{T_{AC} = 50.05 \text{ N}}$$

2.16.2 Ejemplo 2.9

El mástil *OA* de una antena se fija mediante tres vientos *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D*, como se muestra en la figura 2.30(a), al ajustarle un ángulo de elevación de 50° a cada uno y los ángulos de 30° y 40°, medidos en el plano horizontal *xz*. Si la reacción ejercida por el mástil en el punto *A* es vertical y la tensión aplicada en el viento *AB* es de 150 lb, ¿cuál es la tensión en *AC* y *AD* y el valor de la reacción correspondiente?

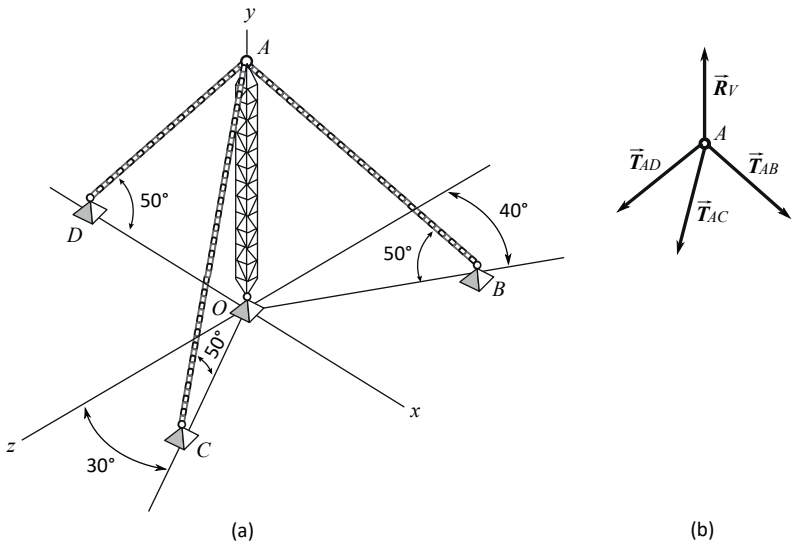


Figura 2.30

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la partícula *A*, el cual se muestra en la figura 2.30(b), y se expresa cada una de las fuerzas en forma vectorial.

En cuanto a la tensión $\vec{T}_{AB}$, se observa, de acuerdo con la figura 2.31, que presenta dos componentes escalares, una según el eje *y* o componente vertical y otra en el plano *xz* o componente horizontal; asimismo, esta contiene dos componentes, una según el eje *x* y otra en el eje *z*, como se verá a continuación:

$$(T_{AB})_y = -(T_{AB})\ sen\ 50° \qquad (T_{AB})_{xz} = (T_{AB})\ cos\ 50°$$

$$(T_{AB})_x = (T_{AB})_{xz}\ sen\ 40° = (T_{AB})\ cos\ 50°\ sen\ 40°$$

$$(T_{AB})_z = -(T_{AB})_{xz}\ cos\ 40° = -(T_{AB})\ cos\ 50°\ cos\ 40°$$

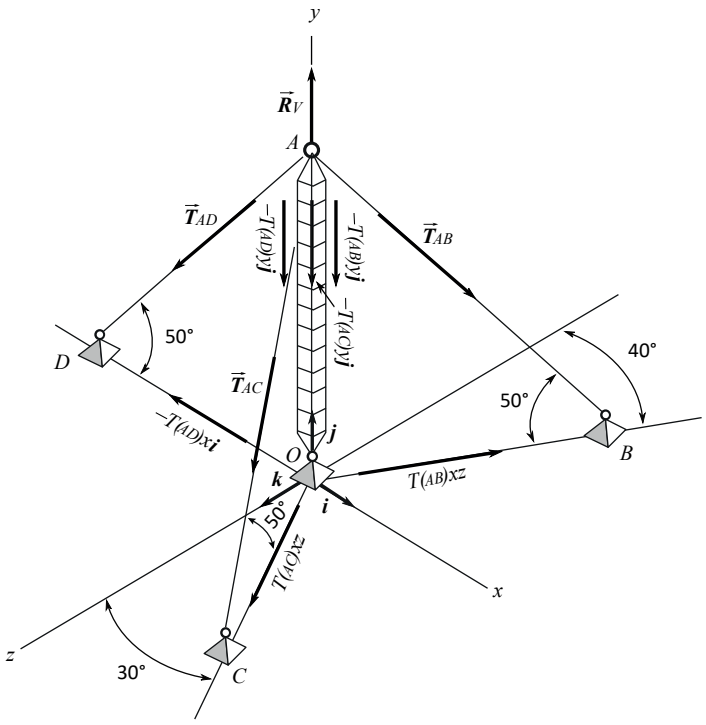


Figura 2.31

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = (T_{AB}\, cos\, 50°\, sen\, 40°)\boldsymbol{i} - (T_{AB}\, sen\, 50°)\boldsymbol{j} - (T_{AB}\, cos\, 50°\, cos\, 40°)\boldsymbol{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AB} = 0.413T_{AB}\boldsymbol{i} - 0.766T_{AB}\boldsymbol{j} - 0.492T_{AB}\boldsymbol{k}$$

Las tensiones $\vec{\boldsymbol{T}}_{AC}$ y $\vec{\boldsymbol{T}}_{AD}$ se descomponen en forma similar y la reacción $\vec{\boldsymbol{R}}_V$ contiene solo una componente vertical, así:

$$(T_{AC})_y = -(T_{AC})\, sen\, 50° \qquad (T_{AC})_{xz} = (T_{AC})\, cos\, 50°$$

$$(T_{AC})_x = (T_{AC})_{xz}\, sen\, 30° = T_{AC}\, cos\, 50°\, sen\, 30°$$

$$(T_{AC})_z = (T_{AC})_{xz}\, cos\, 30° = T_{AC}\, cos\, 50°\, cos\, 30°$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AC} = T_{AC}\, cos\, 50°\, sen\, 30°\boldsymbol{i} - T_{AC}\, sen\, 50°\boldsymbol{j} + T_{AC}\, cos\, 50°\, cos\, 30°\, \boldsymbol{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AC} = 0.321T_{AC}\boldsymbol{i} - 0.766T_{AC}\boldsymbol{j} + 0.556T_{AC}\boldsymbol{k}$$

$$(T_{AD})_y = -(T_{AD})\, sen\, 50° \qquad (T_{AD})_x = -(T_{AD})\, cos\, 50°$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{AD} = -T_{AD}\, cos\, 50°\boldsymbol{i} - T_{AD}\, sen\, 50°\boldsymbol{j} = -0.642T_{AD}\boldsymbol{i} - 0.766T_{AD}\boldsymbol{j}$$

$$\vec{\boldsymbol{R}}_V = R_V\boldsymbol{j}$$

Se aplican las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0:\ 0.413T_{AB} + 0.321T_{AC} - 0.642T_{AD} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0:\ -0.766T_{AB} - 0.766T_{AC} - 0.766T_{AD} + R_V = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0:\ -0.492T_{AB} + 0.556T_{AC} = 0 \qquad (3)$$

Se sustituye el valor de T_{AB} = 150 lb en la ecuación 3, para obtener:

$$0.556T_{AC} = 0.492(150\ \text{lb}) \quad \boldsymbol{T_{AC} = 132.7\ \text{lb}}$$

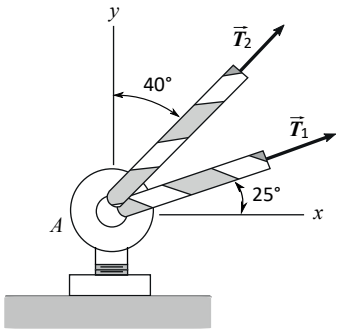
Al reemplazar valores en la ecuación 1:

$$0.642T_{AD} = 0.413T_{AB} + 0.321T_{AC} = 0.413(150\ \text{lb}) + 0.321(132.73\ \text{lb})0.642 \quad \boldsymbol{T_{AD} = 162.9\ \text{lb}}$$

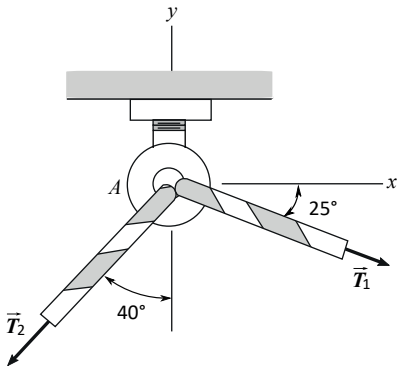
$$R_V = 0.766(150\ \text{lb}) + 0.766(132.73\ \text{lb}) + 0.766(162.85\ \text{lb}) = 341.31\ \text{lb} \quad \boldsymbol{R_V = 341.3\ \text{lb}}$$

2.17 Problemas propuestos

Problemas 2.1 y 2.2. Si las magnitudes de las tensiones son T_1 = 60 N y T_2 = 80 N, determinar la magnitud y la dirección de la tensión resultante: *a*) gráficamente mediante la ley del paralelogramo *b*) por el método de la adición de componentes. Comparar los resultados.

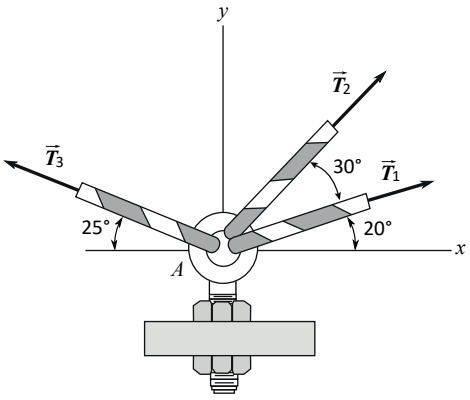


Problema 2.1

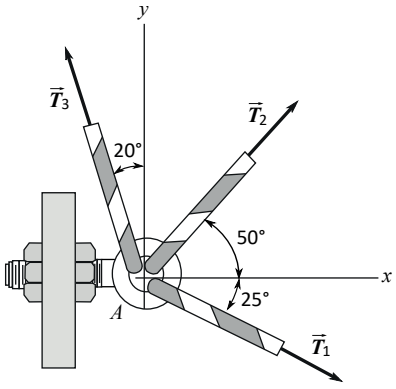


Problema 2.2

Problemas 2.3 y 2.4. Si las magnitudes de las tensiones son T_1 = 60 N, T_2 = 80 N y T_3 = 100 N, determinar la magnitud y la dirección de la tensión resultante: *a*) gráficamente mediante la ley del paralelogramo *b*) por el método de adición de componentes. Comparar los resultados.



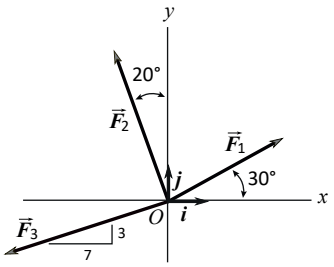
Problema 2.3



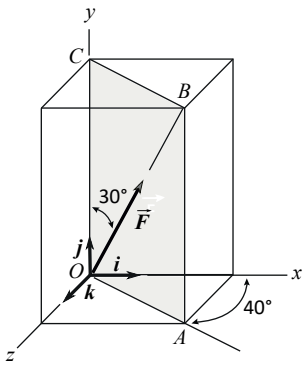
Problema 2.4

Problema 2.5. Si las magnitudes de las fuerzas son F_1 = 90 lb, F_2 = 100 lb y F_3 = 120 lb, expresar cada una de las fuerzas en forma de componentes mediante los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

Problema 2.6. Si la magnitud de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ es 100 N, expresar a $\vec{\boldsymbol{F}}$ en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.



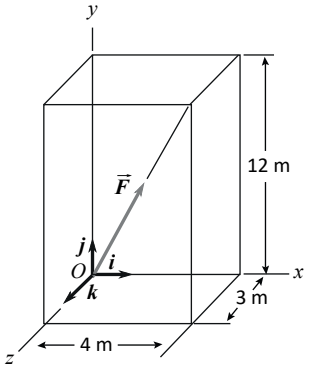
Problema 2.5



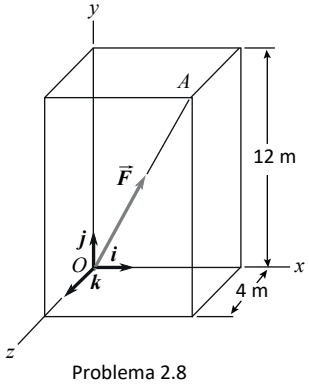
Problema 2.6

Problema 2.7. Si la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ es 130 N, expresar a $\vec{F}$ en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.

Problema 2.8. Sabiendo que la diagonal del paralelepípedo OA = 14 m, correspondiente a la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$, y su magnitud 140 N, expresar a $\vec{F}$ en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.



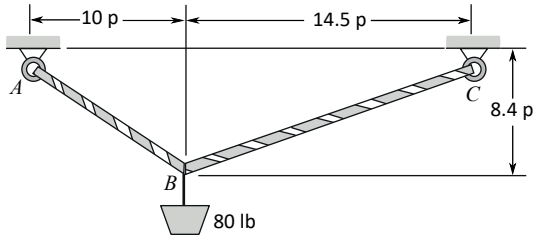
Problema 2.7



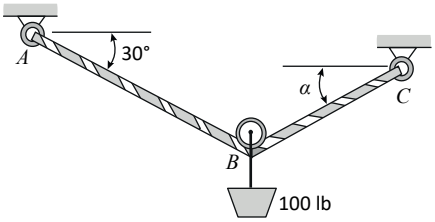
Problema 2.8

Problema 2.9. Un peso de 80 lb es sostenido mediante dos cuerdas *AB* y *BC* como se muestra en la figura. Determinar las tensiones en las cuerdas.

Problema 2.10. Una pequeña polea *B* puede deslizarse libremente sobre la cuerda *ABC* como se indica en la figura. Determinar la tensión en la cuerda y el ángulo α, correspondientes a la posición de equilibrio.



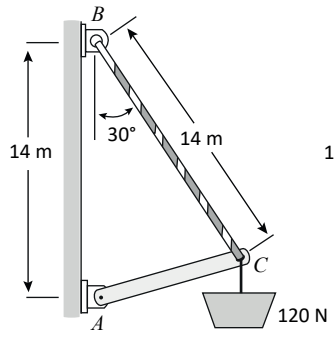
Problema 2.9



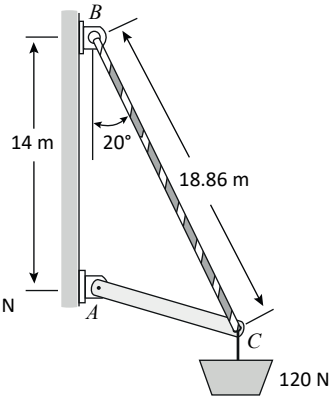
Problema 2.10

Problemas 2.11 y 2.12. Un peso de 120 N es sostenido mediante una cuerda *BC* y una barra *AC* en la posición mostrada en la figura. Determinar la fuerza ejercida por la barra *AC* y la tensión en la cuerda *BC*.

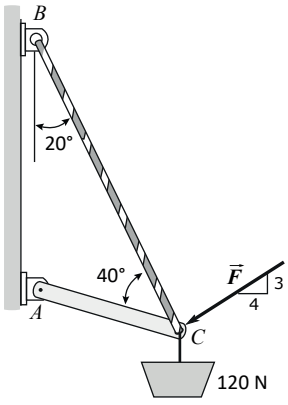
Problemas 2.13. Un peso de 120 N y una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 160 N son aplicados a una cuerda *BC* y una barra *AC* como se muestra en la figura. Determinar la fuerza ejercida por la barra *AC* y la tensión en la cuerda *BC*.



Problema 2.11

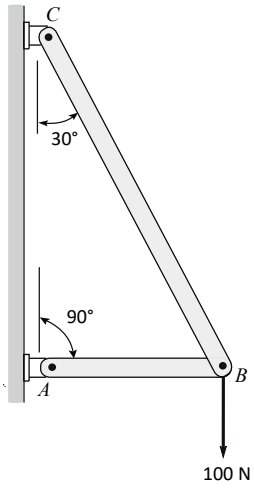


Problema 2.12

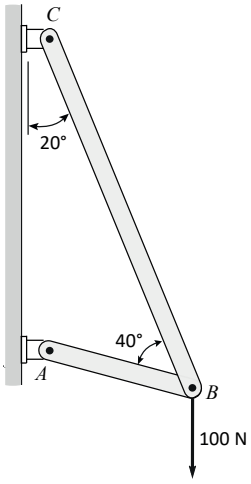


Problema 2.13

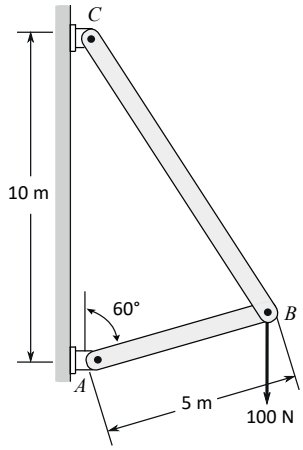
Problemas 2.14, 2.15 y 2.16. Una fuerza de 100 N es aplicada al punto *B*, el cual es común a las barras *AB* y *BC*, como se indica en la figura. Determinar en cada caso la fuerza ejercida por cada una de las barras, *a*) para la fuerza de 100 N dirigida hacia abajo, como lo muestra la figura, *b*) si se invierte la fuerza hacia arriba.



Problema 2.14



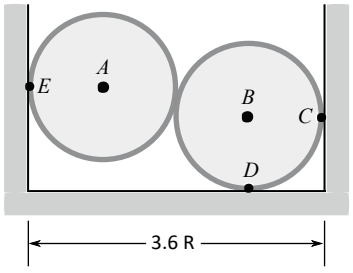
Problema 2.15



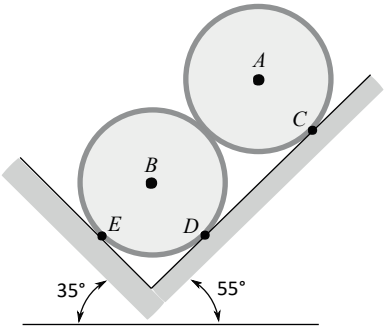
Problema 2.16

Problema 2.17. Dos cilindros *A* y *B* iguales, de radios *R* y pesos iguales a 60 lb, se mantienen en equilibrio como se muestra en la figura. Calcular las reacciones en los puntos de contacto *C*, *D* y *E*.

Problema 2.18. Dos cilindros *A* y *B* iguales, de radios *R* y pesos iguales a 80 lb, se mantienen en equilibrio en la posición mostrada en la figura. Determinar las reacciones en los puntos de contacto *C*, *D* y *E*.



Problema 2.17



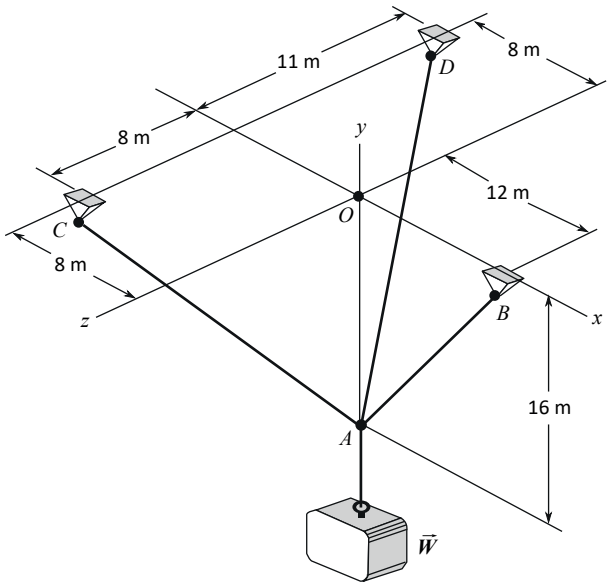
Problema 2.18

Problema 2.19. Un peso $\vec{W}$ de 175 N es sostenido mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD*, unidos al techo en los respectivos puntos *B*, *C* y *D* como se indica en la figura. Hallar la magnitud de la tensión en cada cable.

Problema 2.20. Un peso $\vec{W}$ es sostenido mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD*, unidos al techo en los respectivos puntos *B*, *C* y *D* como se indica en la figura. Si la tensión en el cable *AB* es 105 N, hallar la magnitud de la tensión en los cables *AC* y *AD* y el peso *W*.

Problema 2.21. Un peso $\vec{W}$ es sostenido mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD*, unidos al techo en los respectivos puntos *B*, *C* y *D* como se indica en la figura. Si la tensión en el cable *AC* es de 60 N, hallar la tensión en los cables *AB* y *AD* y el peso *W*.

Problema 2.22. Un peso $\vec{W}$ es sostenido mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD*, unidos al techo en los puntos *B*, *C* y *D* como se indica en la figura. Si la tensión en el cable *AD* es de 56 N, hallar la magnitud de la tensión en los cables *AB* y *AC* y el peso *W*.



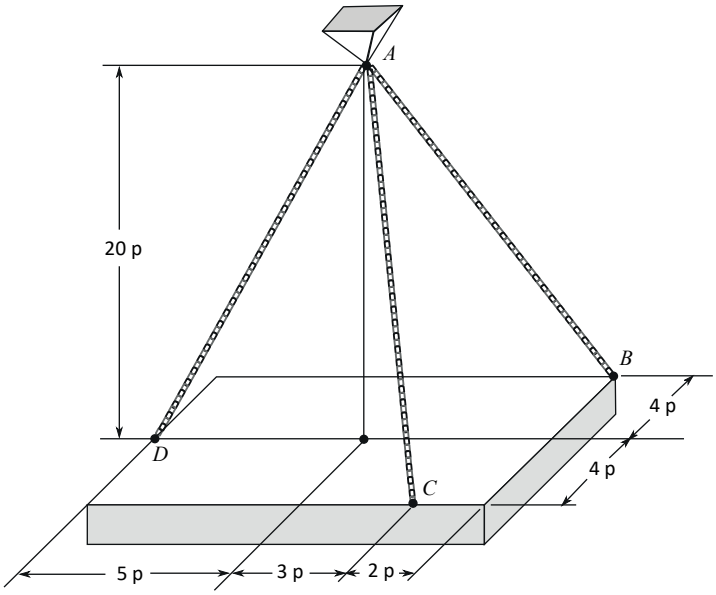
Problemas 2.19, 2.20, 2.21 y 2.22

Problema 2.23. Una losa rectangular de 10 × 8 p es sostenida mediante tres cuerdas *AB*, *AC* y *AD* como se indica en la figura. Calcular la tensión en las cuerdas si el peso de la losa es de 400 lb.

Problema 2.24. Una losa rectangular de 10 × 8 p es sostenida mediante tres cuerdas *AB*, *AC* y *AD* como se indica en la figura. Si la tensión en la cuerda *AB* es de 63 lb, calcular la tensión en las cuerdas *AC* y *AD* y el peso de la losa.

Problema 2.25. Una losa rectangular de 10 × 8 p es sostenida mediante tres cuerdas *AB*, *AC* y *AD* como se indica en la figura. Si la tensión en la cuerda *AC* es de 103 lb, calcular la tensión en las cuerdas *AB* y *AD* y el peso de la losa.

Problema 2.26. Una losa rectangular de 10 × 8 p es sostenida mediante tres cuerdas *AB*, *AC* y *AD* como se indica en la figura. Si la tensión en la cuerda *AD* es de 132 lb, calcular la tensión en las cuerdas *AB* y *AC* y el peso de la losa.



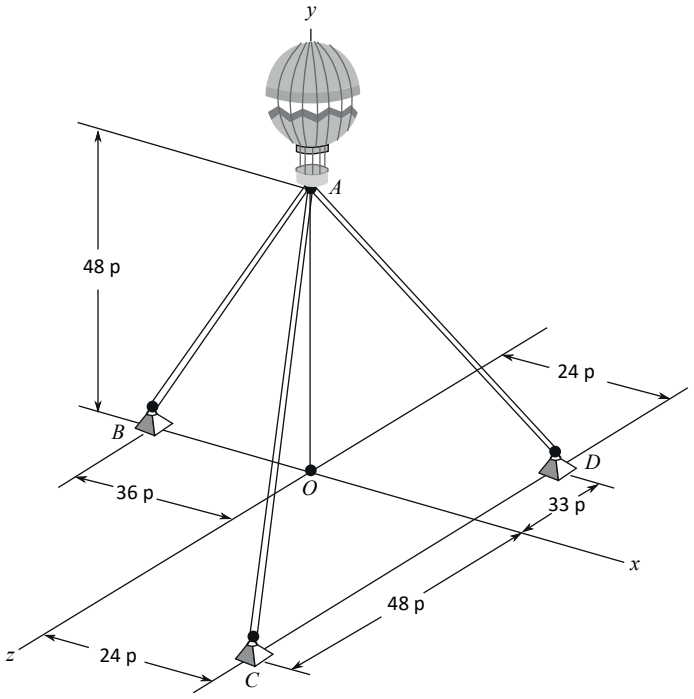
Problemas 2.23, 2.24, 2.25 y 2.26

Problema 2.27. Un globo aerostático es mantenido en la posición indicada por medio de una fuerza de ascenso vertical $\vec{F}_v$ y tres cables *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D* como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable *AB* es de 72 lb, calcular las tensiones en los cables *AC* y *AD* y la magnitud F_V de la fuerza vertical.

Problema 2.28. Un globo aerostático es mantenido en la posición indicada por medio de una fuerza de ascenso vertical $\vec{F}_v$ y tres cables *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D* como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable *AC* es de 66 lb, calcular las tensiones en los cables *AB* y *AD* y la magnitud F_V de la fuerza vertical.

Problema 2.29. Un globo aerostático es mantenido en la posición indicada por medio de una fuerza de ascenso vertical $\vec{F}_v$ y tres cables *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D* como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable *AD* es de 95.2 lb, calcular las tensiones en los cables *AB* y *AC* y la magnitud F_V de la fuerza vertical.

Problema 2.30. Un globo aerostático es mantenido en la posición indicada por medio de una fuerza de ascenso vertical $\vec{F}_v$ y tres cables *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D* como se muestra en la figura. Si la magnitud F_V de la fuerza vertical es 252 lb, calcular las tensiones en los cables *AB*, *AC* y *AD*.

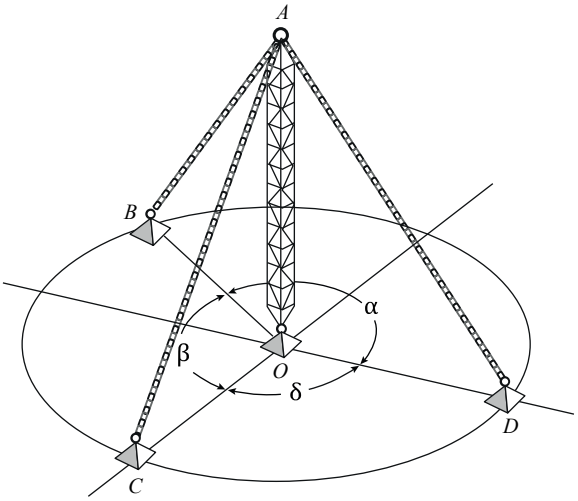


Problemas 2.27, 2.28, 2.29 y 2.30

Problema 2.31. La torre *OA* de altura 16 m se mantiene en posición vertical mediante tres cables atados al piso en los puntos *B*, *C* y *D*, los cuales forman un círculo de radio 12 m, como se indica en la figura. Si la reacción de la torre, $\vec{\boldsymbol{R}}_T$, en el punto *A* es vertical, la tensión en el cable *AB* es de 120 N, siendo $\alpha = 150°$, $\beta = 120°$ y $\delta = 90°$, calcular las tensiones en los cables *AC* y *AD* y la magnitud de la reacción de la torre.

Problema 2.32. La torre *OA* de altura 16 m se mantiene en posición vertical mediante tres cables atados al piso en los puntos *B*, *C* y *D*, los cuales forman un círculo de radio 12 m, como se indica en la figura. Si la reacción de la torre, $\vec{\boldsymbol{R}}_T$, en el punto *A* es vertical, la tensión en el cable *AB* es de 120 N, siendo siendo $\alpha = 120°$, $\beta = 150°$ y $\delta = 90°$, calcular las tensiones en los cables *AC* y *AD* y la magnitud de la reacción de la torre.

Problema 2.33. La torre *OA* de altura 16 m se mantiene en posición vertical mediante tres cables atados al piso en los puntos *B*, *C* y *D*, los cuales forman un círculo de radio 12 m, como se indica en la figura. Si la reacción de la torre, $\vec{\boldsymbol{R}}_T$, en el punto *A* es vertical, la tensión en el cable *AB* es de 120 N, siendo $\alpha = \beta = \delta = 120°$, calcular las tensiones en los cables *AC* y *AD* y la magnitud de la reacción de la torre.



Problemas 2.31, 2.32 y 2.33

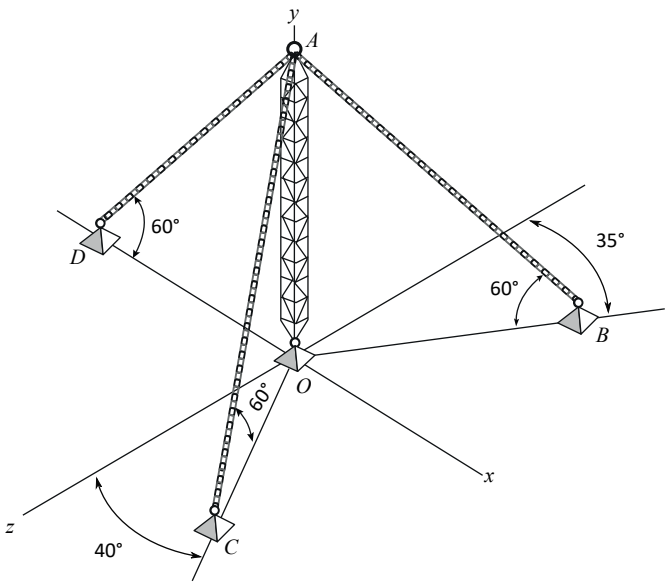
Problema 2.34. El mástil *OA* de una antena se fija mediante tres vientos *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D*, al ajustarle un ángulo de elevación de 60° a cada uno y los ángulos de 35° y 40°, medidos en el plano horizontal *xz*, como se indica en la figura. Si la reacción ejercida por el mástil, $\vec{R}_V$, en el punto *A* es vertical y la tensión aplicada en el viento *AB* es de 120 lb, ¿cuál es la tensión en *AC* y *AD* y el valor de la reacción correspondiente, R_V?

Problema 2.35. El mástil *OA* de una antena se fija mediante tres vientos *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D*, al ajustarle un ángulo de elevación de 60° a cada uno y los ángulos de 35° y 40°, medidos en el plano horizontal *xz*, como se indica en la figura. Si la reacción ejercida por el mástil, $\vec{R}_V$, en el punto *A* es vertical e igual a 300 lb, ¿cuál es la tensión en *AB*, *AC* y *AD*?

Problema 2.36. El mástil *OA* de una antena se fija mediante tres vientos *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D*, al ajustarle un ángulo de elevación de 60° a cada uno y los ángulos de 35° y 40°, medidos en el plano horizontal *xz*, como se indica en la figura. Si la reacción ejercida por el mástil, $\vec{R}_V$, en el punto *A* es vertical y la tensión aplicada en el viento *AC* es de 140 lb, ¿cuál es la tensión en *AB* y *AD* y el valor de la reacción correspondiente, R_V?

Problema 2.37. El mástil *OA* de una antena se fija mediante tres vientos *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los respectivos puntos *B*, *C* y *D*, al ajustarle un ángulo de elevación de 60° a cada uno y los ángulos de 35° y 40°, medidos en el plano horizontal *xz*, como se indica en la figura. Si la reacción ejercida por el mástil, $\vec{R}_V$, en el punto *A* es vertical y la

tensión aplicada en el viento *AD* es de 160 lb, ¿cuál es la tensión en *AB* y *AC* y el valor de la reacción correspondiente, R_V?



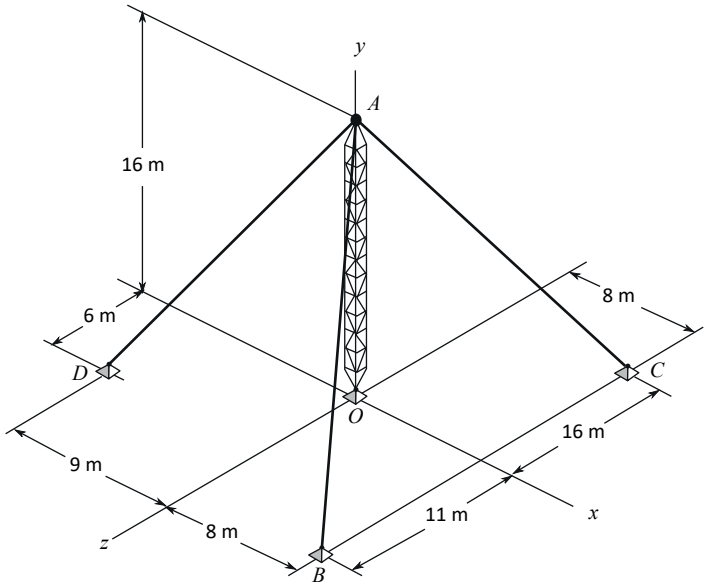
Problemas 2.34, 2.35, 2.36 y 2.37

Problema 2.38. Una torre *OA* se mantiene en posición vertical mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los puntos respectivos *B*, *C* y *D* como se indica en la figura. Si la reacción de la torre, $\vec{\boldsymbol{R}}_V$, en el punto *A* es vertical y la tensión en la cuerda *AB* es igual a 45 N, calcular el valor de la reacción de la torre, R_V, y las tensiones en los cables *AC* y *AD*.

Problema 2.39. Una torre *OA* se mantiene en posición vertical mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los puntos respectivos *B*, *C* y *D* como se indica en la figura. Si la reacción de la torre, $\vec{\boldsymbol{R}}_V$, en el punto *A* es vertical y la tensión en la cuerda *AC* es igual a 90 N, calcular la magnitud de la reacción de la torre, R_V, y las tensiones en los cables *AB* y *AD*.

Problema 2.40. Una torre *OA* se mantiene en posición vertical mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los puntos respectivos *B*, *C* y *D* como se indica en la figura. Si la reacción de la torre, $\vec{\boldsymbol{R}}_V$, en el punto *A* es vertical y la tensión en la cuerda *AD* es igual a 120 N, calcular la reacción de la torre, R_V, y las tensiones en los cables *AB* y *AC*.

Problema 2.41. Una torre *OA* se mantiene en posición vertical mediante tres cables *AB*, *AC* y *AD* atados al piso en los puntos respectivos *B*, *C* y *D* como se indica en la figura. Si la reacción de la torre, $\vec{\boldsymbol{R}}_V$, en el punto *A* es vertical e igual a 230 N, calcular las tensiones en los cables *AB*, *AC* y *AD*.



Problemas 2.38, 2.39, 2.40 y 2.41

Sistemas equivalentes de fuerzas

3

Objetivos del capítulo

- Convertir sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido en sistemas equivalentes.
- Estudiar las herramientas del álgebra vectorial: producto vectorial y producto escalar.
- Determinar el momento de una fuerza con respecto a un punto y con respecto a un eje, y el momento de un par.
- Convertir una o varias fuerzas en un sistema fuerza-par equivalente.
- Analizar sistemas equivalentes de fuerzas en el plano, de fuerzas paralelas en el espacio y, en general, de fuerzas en el espacio.

3.1 Introducción

En estática es habitual tratar con cuerpos o partículas sobre los cuales se aplican varias fuerzas, a las que se les da el nombre de sistema de fuerzas. Por conveniencia, es costumbre convertir los sistemas de fuerzas en conjuntos más simplificados, denominados *sistemas equivalentes,* con la condición de que produzcan los mismos efectos que las fuerzas originales actuando en común.

En la primera parte del capítulo anterior se trató acerca de reemplazar un sistema de fuerzas concurrentes en una partícula por una sola resultante, cuya acción causada sea la misma que la de las fuerzas iniciales en su conjunto. Dicha resultante es de hecho una fuerza equivalente y su efecto sobre la partícula, consistente en acción de traslación, es el mismo que el de la suma de las acciones de traslación debidas a las fuerzas originales.

El objetivo del presente capítulo es hallar sistemas equivalentes que actúan no sobre una partícula, sino en un cuerpo rígido, el cual por definición está compuesto por un sinnúmero de partículas separadas entre sí por distancias que permanecen fijas, aun bajo la acción de fuerzas.

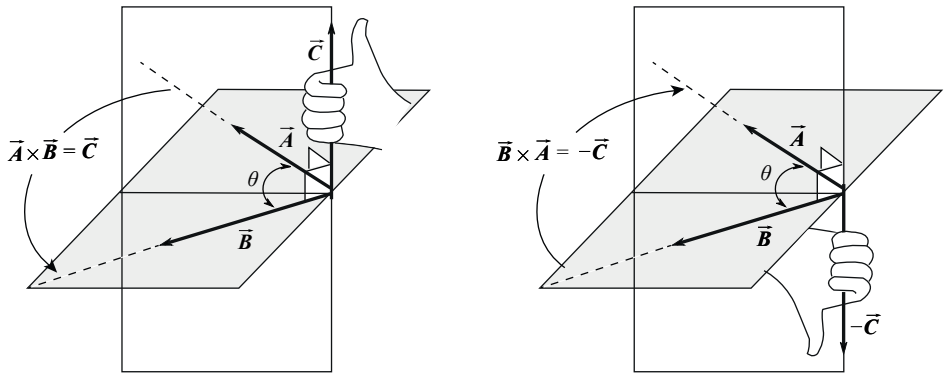
El hecho de que en un cuerpo rígido ya no se encuentran las fuerzas aplicadas en un solo punto, como ocurre en el caso de una partícula, sino separadas a determinadas distancias da lugar a que se produzcan efectos de rotación sobre el cuerpo, debidos a los momentos de las fuerzas, además de las consecuentes acciones de traslación. Esto significa que para el análisis de fuerzas equivalentes en un cuerpo rígido se deben tener en cuenta tanto los efectos de traslación como los de rotación, generados por los momentos de las fuerzas.

3.2 Producto vectorial de dos vectores

Antes de abordar los temas de momento de una fuerza con respecto a un punto y con respecto a un eje, los cuales serán tratados más adelante en este capítulo, es necesario aprender primero acerca de dos herramientas proporcionadas por el álgebra vectorial: el producto vectorial y el producto escalar, contemplados a continuación.

El *producto vectorial de dos vectores* $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se define como el vector $\vec{C}$ cuya línea de acción es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$; su sentido está determinado por la regla de la mano derecha y su magnitud C es igual al producto de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el seno del ángulo θ entre ellos, como se indica en la figura 3.1(a), o sea:

$$C = AB\ sen\ \theta \tag{3.1}$$



(a) (b)

Figura 3.1

El producto vectorial, denominado también producto cruz, se designa por una cruz en medio de los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, así:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \tag{3.2}$$

Al aplicar la regla de la mano derecha para efectuar el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, es necesario inicialmente abrirla con el dedo pulgar en dirección perpendicular al plano donde se encuentran $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y al cerrarla, describir con los dedos restantes el movimiento que se obtiene al plegar $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$, entonces el sentido de $\vec{C}$ estará indicado por el mencionado dedo pulgar, como lo muestra la figura 3.1(a).

Nótese que al efectuar el producto vectorial de $\vec{B} \times \vec{A}$, como se indica en la figura 3.1(b), se obtiene un vector de la misma dirección perpendicular al plano donde se encuentran $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con la diferencia de que al aplicar la regla de la mano derecha es necesario al abrirla colocar el pulgar hacia abajo, para que al cerrarla se pueda obtener con los otros cuatro dedos el movimiento de doblar $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$, dando como resultado un vector $-\vec{C}$, de la misma magnitud y la misma dirección de $\vec{C}$, aunque de sentido contrario, expresado así:

$$-\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A} \tag{3.3}$$

3.3 Propiedades del producto vectorial

Al comparar las relaciones 3.2 y 3.3 se observa que el producto vectorial no es conmutativo, puesto que $\vec{A} \times \vec{B}$ es diferente de $\vec{B} \times \vec{A}$, siendo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{3.4}$$

En lo referente a la propiedad distributiva de la suma, se puede afirmar que se cumple, teniendo en cuenta que la siguiente ecuación es demostrable:

$$\vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{A} \times \vec{B}_1 + \vec{A} \times \vec{B}_2 \tag{3.5}$$

3.4 Producto vectorial de los vectores unitarios

Al asignar los vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ a los ejes *x, y* y *z*, respectivamente, el producto vectorial para cada par de ellos, mostrados en la figura 3.2, está dado por:

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0 \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \tag{3.6}a$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0 \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} \tag{3.6}b$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \tag{3.6}c$$

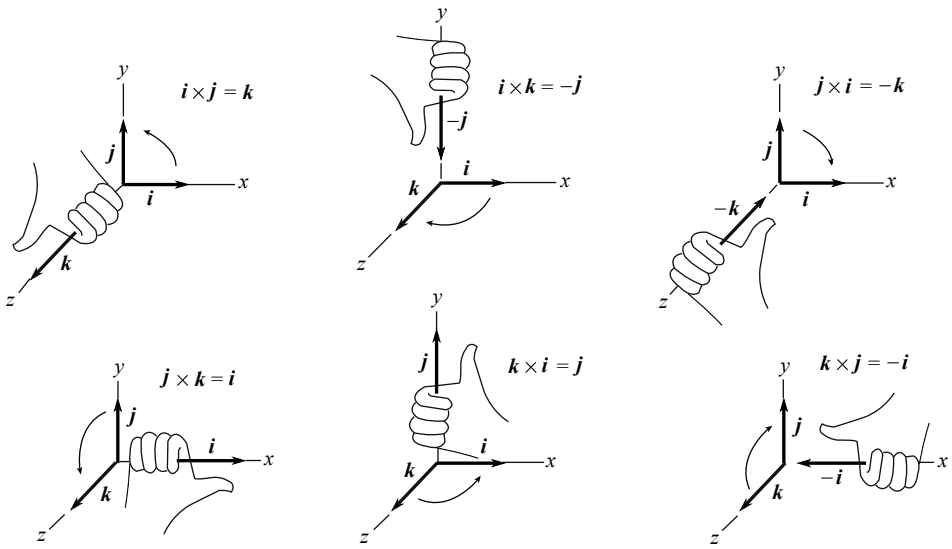


Figura 3.2

Es de notar que el producto vectorial de los vectores iguales: $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}$, es igual a cero, puesto que al sustituir valores en la relación 3.1, la magnitud está dada por 1×1 *sen* $0° = 0$.

3.5 Representación cartesiana del producto vectorial

Al expresar los vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ en forma de componentes rectangulares según los ejes *x, y* y *z*, se tiene:

$$\vec{\boldsymbol{A}} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$$

El producto vectorial $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ está dado por:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) \times (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k})$$

Al aplicar la propiedad distributiva y factorizar:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = {} & A_x\boldsymbol{i} \times B_x\boldsymbol{i} + A_x\boldsymbol{i} \times B_y\boldsymbol{j} + A_x\boldsymbol{i} \times B_z\boldsymbol{k} \\ & + A_y\boldsymbol{j} \times B_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} \times B_y\boldsymbol{j} + A_y\boldsymbol{j} \times B_z\boldsymbol{k} \\ & + A_z\boldsymbol{k} \times B_x\boldsymbol{i} + A_z\boldsymbol{k} \times B_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \times B_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Al reemplazar los resultados de los productos entre los vectores unitarios de acuerdo con las relaciones 3.6 y agrupar:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = (A_y B_z - A_z B_y)\boldsymbol{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\boldsymbol{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\boldsymbol{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j} + C_z\boldsymbol{k}$$

O sea que las respectivas componentes escalares de $\vec{\boldsymbol{C}}$ están dadas por:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y \tag{3.7}a$$

$$C_y = A_z B_x - A_x B_z \tag{3.7}b$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x \tag{3.7}c$$

Por lo tanto, al ser expresado en forma de determinantes, se tiene:

$$\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

3.6 Interpretación geométrica del producto vectorial

De acuerdo con la relación 3.1, la magnitud *C*, del vector $\vec{\boldsymbol{C}}$ como resultado del producto vectorial de $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$, está dada por:

$$C = AB \operatorname{sen} \theta$$

Siendo *A* y *B* las respectivas magnitudes de los vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ y θ el ángulo entre ellos.

Teniendo en cuenta las figuras 3.3(a) y 3.3(b), se observa que el área del paralelogramo formado con los vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ como lados es igual a:

$$\text{Área} = A\ (B \operatorname{sen} \theta) \text{ o Área} = B\ (A \operatorname{sen} \theta)$$

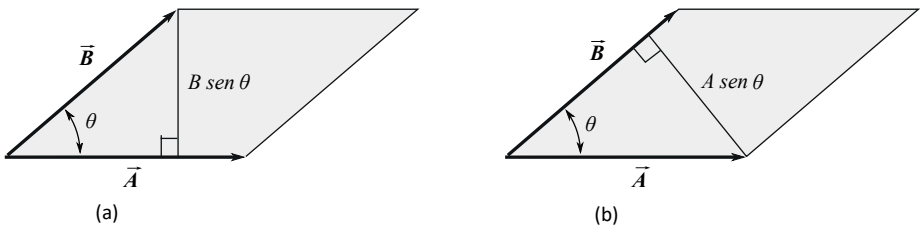


Figura 3.3

Resultado que concuerda con la relación 3.1; por lo tanto, se puede afirmar que la magnitud *C*, del vector $\vec{C}$, correspondiente al producto vectorial de $\vec{A} \times \vec{B}$, es igual al área del paralelogramo formado con los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como lados.

3.6.1 Ejemplo 3.1

En relación con el sólido mostrado en la figura 3.4, hallar: *a*) el área del paralelogramo formado con los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ como lados y *b*) la distancia perpendicular *CD* desde el punto *C* hasta la línea de acción del vector $\overrightarrow{AB}$.

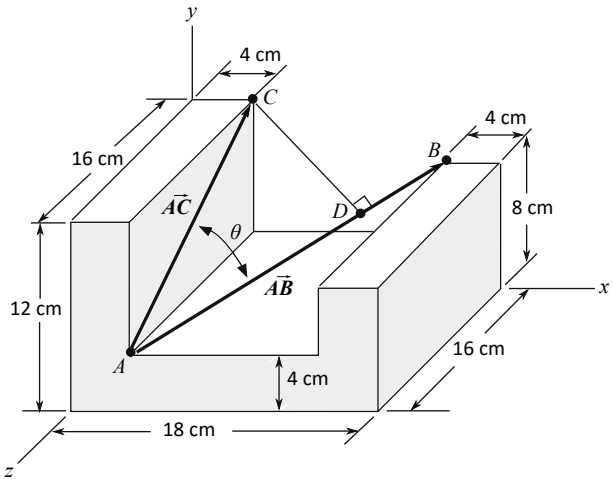


Figura 3.4

Solución

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ con sus respectivas magnitudes están dados por:

$$\overrightarrow{AB} = 10\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 16\boldsymbol{k}\ [\text{cm}] \quad AB = \sqrt{10^2 + 4^2 + 16^2}\ [\text{cm}] = 19.28\ \text{cm}$$

$$\overrightarrow{AC} = 8\boldsymbol{j} - 16\boldsymbol{k}\ [\text{cm}] \quad AC = \sqrt{8^2 + 16^2}\ [\text{cm}] = 17.88\ \text{cm}$$

El vector $\vec{V}$ como resultado del producto $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ está dado por:

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 10 & 4 & -16 \\ 0 & 8 & -16 \end{bmatrix} [\text{cm}^2] = 64\boldsymbol{i} + 160\boldsymbol{j} + 80\boldsymbol{k}\ [\text{cm}^2]$$

El área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ como lados es igual a la magnitud *V* del vector $\vec{V}$, así:

$$\text{Área} = \boldsymbol{V} = \sqrt{64^2 + 160^2 + 80^2}\ [\text{cm}^2] = \mathbf{190\ cm^2}$$

Y la distancia *CD* desde el punto *C* hasta la línea de acción del vector $\overrightarrow{AB}$, como se aprecia en la figura 3.4, es:

$$\boldsymbol{CD} = AC\ sen\ \theta = V/AB = 190\ \text{cm}^2/19.28\ \text{cm} = \mathbf{9.9\ cm}$$

3.7 Características del momento de una fuerza

Las fuerzas son cantidades vectoriales y como tales poseen punto de aplicación, magnitud, dirección y sentido. Debido a la aplicación de fuerzas en puntos determinados de un cuerpo rígido, surgen otras cantidades derivadas de las primeras, las cuales por sus características deben expresarse también como vectores, siendo por lo tanto cantidades vectoriales. Tal es el caso del efecto de rotación que tiende a producir una fuerza aplicada en un punto determinado de un cuerpo rígido.

Un ejemplo de ello lo constituye el mecanismo ilustrado en la figura 3.5, utilizado para levantar un peso $\vec{W}$ mediante el arrollamiento de una cuerda en un cilindro que gira alrededor de un eje *EE'*. Dicho movimiento es causado por una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto *A*, separado por una distancia *d* de un punto *O* localizado sobre el eje *EE'*, como se indica, denominado momento con respecto al punto *O*, representado por el vector $\vec{M}_O$, cuya magnitud M_o está dada por el producto de la magnitud *F* de la fuerza por la distancia *d*, o sea $M_o = Fd$.

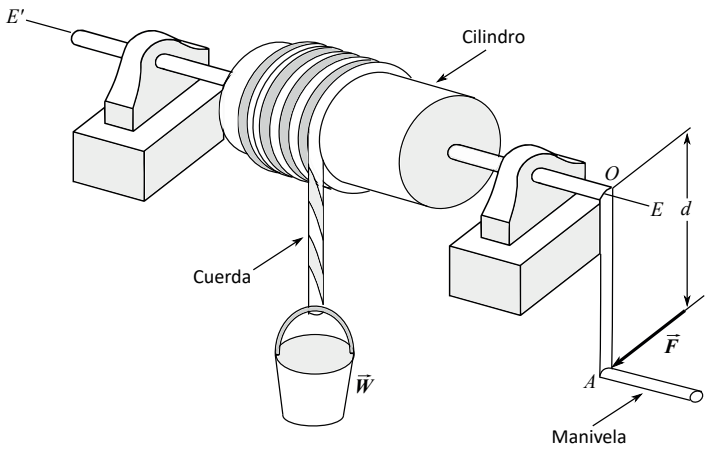


Figura 3.5

El momento causado es una cantidad vectorial puesto que además de tener magnitud se caracteriza por poseer también dirección y sentido. Mientras que la dirección está indicada por el eje de rotación *EE'*, el sentido se determina al aplicar la regla de la mano derecha, la cual es tomada como referencia para definir el sentido de un vector que represente el movimiento de giro de un eje.

Para aplicarla, se coloca inicialmente la mano derecha abierta de tal manera que el dedo pulgar quede alineado con el eje *EE'* y, además, que el movimiento de giro del eje se describa al cerrar los dedos restantes, tal como se muestra en la figura 3.6, entonces el pulgar estará señalando el sentido del vector $\vec{M}_O$ que representa dicho movimiento.

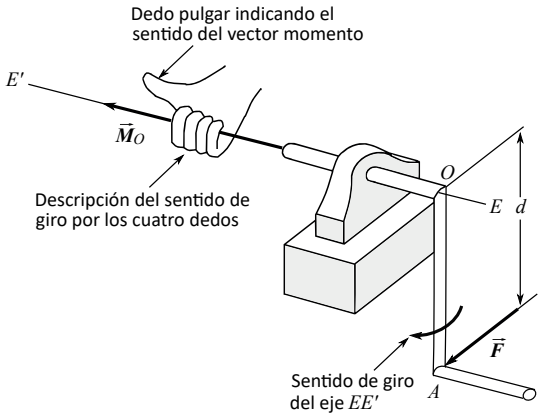


Figura 3.6

Otro ejemplo del momento de una fuerza como una cantidad vectorial se presenta en el conjunto llave tornillo, mostrado en la figura 3.7. La fuerza $\vec{F}$, de magnitud *F*, aplicada en la llave a una distancia *d* del punto *O*, tiende a girar el tornillo alrededor del eje *EE'*, cuyo movimiento es usado para apretarlo o soltarlo. La magnitud de tal acción está dada por $M_O = Fd$, la dirección está indicada por el eje *EE'* y el sentido del vector resultante $\vec{M}_O$ está definido al aplicar la regla de la mano derecha, tal como lo indica la figura 3.7.

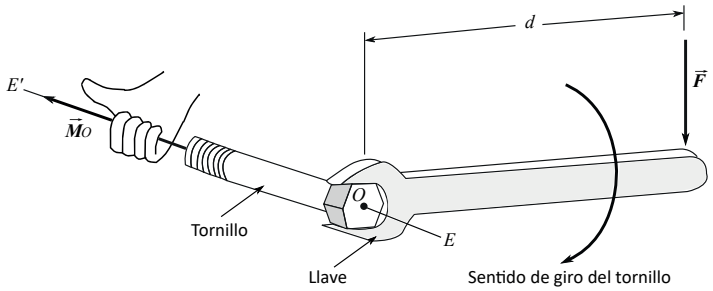


Figura 3.7

3.8 Momento de una fuerza con respecto a un punto

Considere una fuerza $\vec{F}$ que actúa en el punto *A* de un cuerpo rígido y sea *O* un punto de referencia en el cuerpo, como se indica en la figura 3.8(a). La posición del punto *A* está definida por el vector $\vec{r}$ desde el punto *O* hasta el punto *A*, denominado vector de posición de *A* con respecto a *O*.

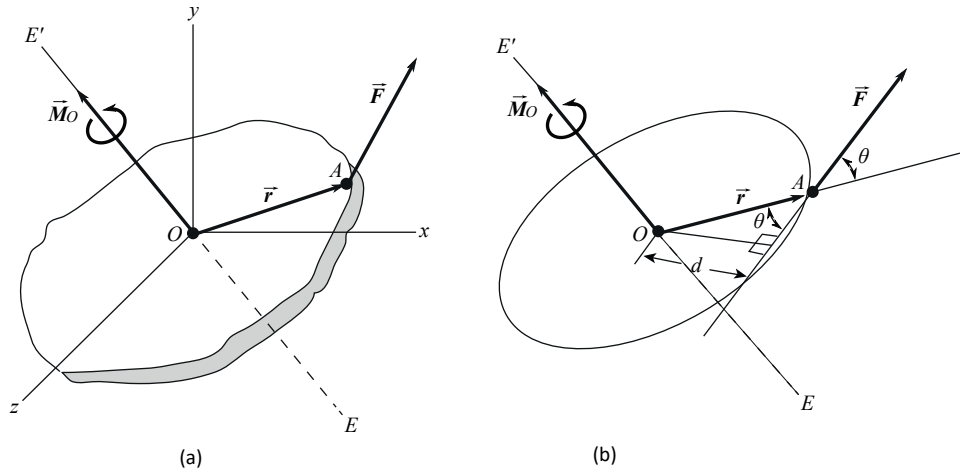


Figura 3.8

La fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto *A* tiende a producir un movimiento de rotación del cuerpo alrededor del eje *EE'*, siendo este un eje que pasa por *O* y es perpendicular al plano donde se encuentran $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Tal efecto se representa mediante el vector $\vec{M}_O$, denominado *momento de la fuerza con respecto al punto O,* cuya dirección coincide con dicho eje *EE'*.

Por las anteriores razones, el momento $\vec{M}_O$ de la fuerza $\vec{F}$ aplicada en *A*, con respecto al punto *O*, se define como el producto vectorial de $\vec{r}$ y $\vec{F}$, así:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.9}$$

Resultando de acuerdo con la definición un vector $\vec{M}_O$ cuya dirección es perpendicular al plano donde se encuentran $\vec{r}$ y $\vec{F}$, de sentido tal que cumple con la regla de la mano derecha y su magnitud está dada por:

$$M_O = rF\ sen\ \theta = Fd \tag{3.10}$$

Siendo $d = rF\ sen\ \theta$ la distancia perpendicular desde el punto *O* hasta la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$, como se muestra en la figura 3.8(b).

El plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$, el cual como ya hemos visto es perpendicular al vector del momento $\vec{M}_O$, se denomina *plano de acción de la fuerza* $\vec{F}$ y se puede definir como aquel que existe entre la línea de acción de fuerza $\vec{F}$ y el punto *O*, donde corta al eje de giro del cuerpo *EE'* o línea de acción del momento $\vec{M}_O$, siendo perpendiculares entre sí, como se aprecia en la figura 3.8(b).

3.9 Representación cartesiana del momento de una fuerza

Considere una fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto *A*, cuyo vector de posición es $\vec{r}$ con respecto al origen *O*, como se indica en la figura 3.9. Al expresar ambos vectores en forma de componentes rectangulares, según los ejes *x, y* y *z*, se tiene:

$$\vec{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \qquad \vec{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

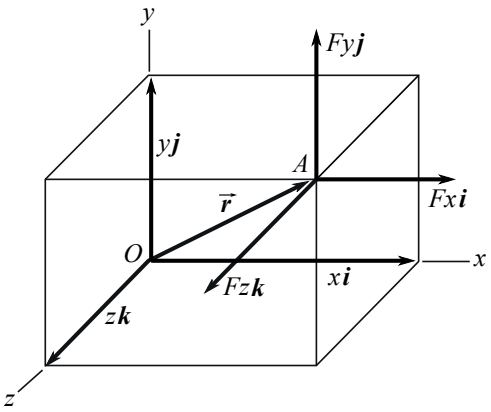


Figura 3.9

Teniendo en cuenta la expresión 3.9 y reemplazando valores, resulta:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \times (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k})$$

Al definir $\vec{M}_O$ en forma de componentes rectangulares, se da:

$$\vec{M}_O = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k} \tag{3.11}$$

Tomando los resultados de la expresión 3.7 para hallar las componentes rectangulares del producto vectorial y al sustituir valores correspondientes, se obtiene:

$$M_x = yF_z - zF_y \tag{3.12}a$$

$$M_y = zF_x - xF_z \tag{3.12}b$$

$$M_z = xF_y - yF_x \tag{3.12}c$$

En donde M_x, M_y y M_z constituyen las componentes escalares del momento $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ con respecto al punto *O*, las cuales representan la tendencia de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ a imprimir un movimiento de rotación alrededor de los ejes *x, y* y *z*, respectivamente. Por lo tanto, en forma de determinantes, se expresa así:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

3.9.1 Ejemplo 3.2

Una tubería *OABC*, empotrada en el punto *O*, es sostenida al aplicarle una fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ de magnitud 180 N en el punto *C* mediante una cadena *CD*, como se indica en la figura 3.10. Hallar el momento $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ con respecto al punto *O*: *a*) vectorialmente, por la aplicación directa de la relación 3.9, y *b*) en forma escalar, mediante las componentes según los ejes *x, y* y *z*.

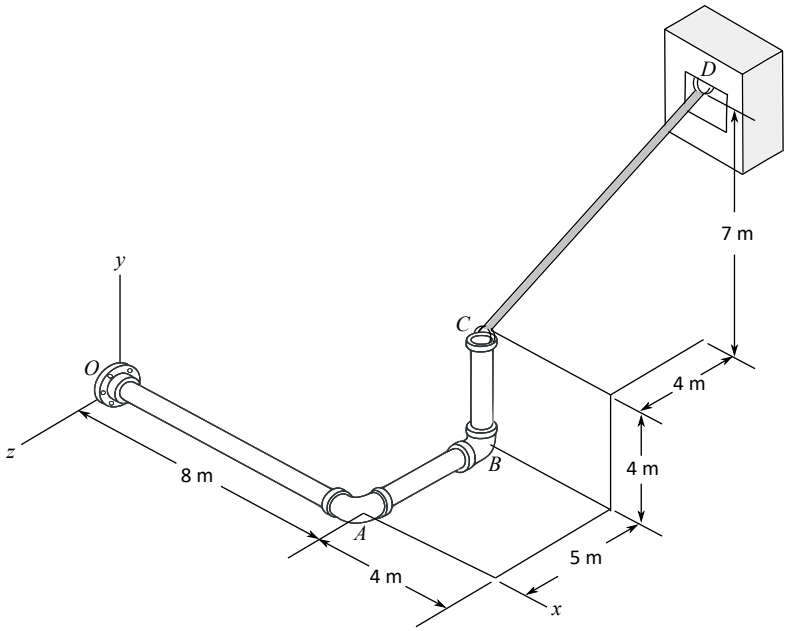


Figura 3.10

Solución (a)

El momento $\vec{M}_O$ de una fuerza $\vec{F}$ aplicada en *C*, con respecto al punto *O*, se define como el producto vectorial de $\vec{r}$ y $\vec{F}$, de acuerdo con la expresión 3.9, así:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1}$$

Se asignan los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$, como se muestra en la figura 3.11, siendo $\vec{r}$ el vector de posición del punto *C* respecto del punto *O* y $\vec{F}$ la fuerza ejercida por la cadena *CD*, por lo que $\vec{r}$, expresado en forma de componentes rectangulares, queda así:

$$\vec{r} = 8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}\ [\text{m}]$$

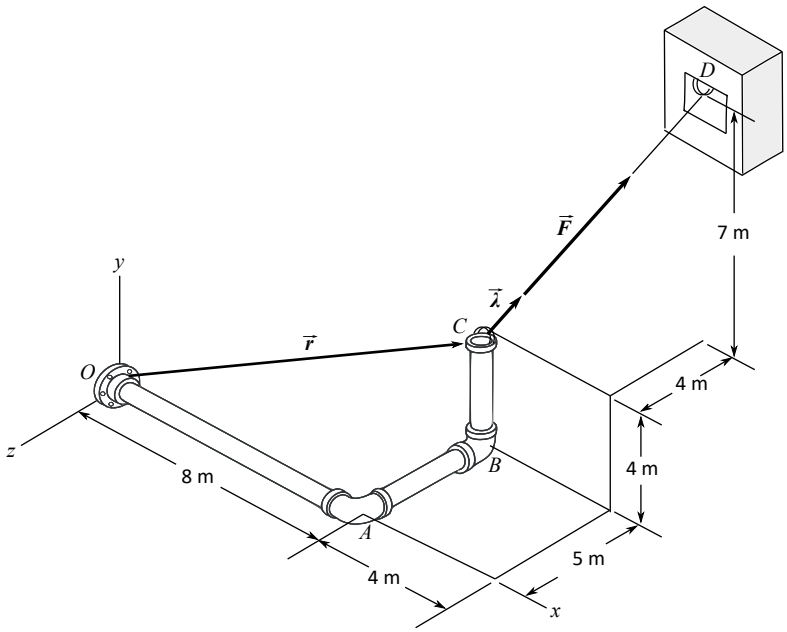


Figura 3.11

Teniendo en cuenta la relación 2.32, la fuerza $\vec{F}$ se expresa en términos de su magnitud *F* y un vector unitario $\vec{\lambda}$, así:

$$\vec{F} = \vec{\lambda}F \tag{2}$$

De acuerdo con la figura 3.11, el vector unitario $\vec{\lambda}$ se obtiene así:

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} = \frac{4\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{4\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}}{9}$$

Dado que F = 180 N, al reemplazar valores en la ecuación 2:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \left(\frac{4}{9}\boldsymbol{i} + \frac{7}{9}\boldsymbol{j} - \frac{4}{9}\boldsymbol{k}\right) 180\ [\text{N}] = 80\boldsymbol{i} + 140\boldsymbol{j} - 80\boldsymbol{k}\ [\text{N}]$$

En la figura 3.12(a) se muestran los vectores $\vec{\boldsymbol{r}}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}$ en forma de componentes. Al resolver $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ en forma de determinantes según la expresión 3.13:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 4 & -5 \\ 80 & 140 & -80 \end{bmatrix} [\text{Nm}]$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = +\mathbf{380}\boldsymbol{i} + \mathbf{240}\boldsymbol{j} + \mathbf{800}\boldsymbol{k}\ [\mathbf{Nm}]$$

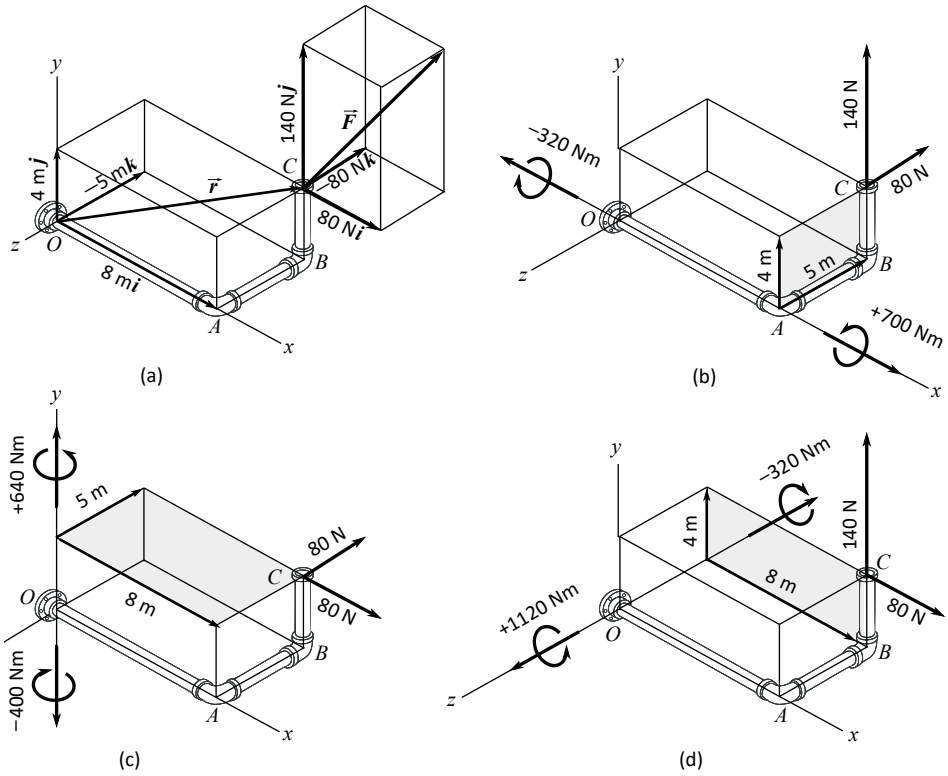


Figura 3.12

Solución (b)

Al descomponer el momento $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ en forma de componentes rectangulares, según los ejes *x, y* y *z*, teniendo en cuenta la ecuación 3.11, se tiene:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k} \quad (3)$$

En donde M_x, M_y y M_z constituyen las componentes escalares del momento $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ con respecto al punto *O*, las cuales representan la tendencia de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ a imprimir un movimiento de rotación alrededor de los ejes *x, y* y *z*, respectivamente.

Para hallar la componente escalar M_x se realiza la sumatoria de momentos alrededor del eje *x*, para lo cual se toman las magnitudes de las componentes escalares de $\vec{\boldsymbol{r}}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}$ en el plano *yz*, como se muestra en la figura 3.12(b), siendo:

$$M_x = +(5\text{ m})(140\text{ N}) - (4\text{ m})(80\text{ N}) = +700\text{ Nm} - 320\text{ Nm} = +380\text{ Nm}$$

Los signos se toman de acuerdo con el sentido de giro causado al aplicar la regla de la mano derecha, como lo indican las flechas curvas, teniendo en cuenta si apuntan hacia el lado positivo o negativo del eje *x*, como se muestra en la figura 3.12(b).

Asimismo, para encontrar la componente escalar M_y, se efectúa la sumatoria con las correspondientes magnitudes de las componentes escalares de $\vec{\boldsymbol{r}}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}$, en el plano *xz*, como se indica en la figura 3.12(c), en donde:

$$M_y = +(8\text{ m})(80\text{ N}) - (5\text{ m})(80\text{ N}) = +640\text{ Nm} - 400\text{ Nm} = +240\text{ Nm}$$

Considerando los signos según el sentido de giro y la aplicación de la regla de la mano derecha, como lo indican las flechas curvas, de acuerdo a si señalan hacia el eje positivo o negativo de la *y*, como se aprecia en la figura 3.12(c).

Por último, la componente escalar M_z se obtiene mediante la sumatoria de las correspondientes magnitudes de las componentes escalares de $\vec{\boldsymbol{r}}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}$, en el plano *xy*, como se indica en la figura 3.12(d), por lo que:

$$M_z = +(8\text{ m})(140\text{ N}) - (4\text{ m})(80\text{ N}) = +1\,120\text{ Nm} - 320\text{ Nm} = +800\text{ Nm}$$

Y de forma similar a los anteriores, los signos se toman de acuerdo con el giro causado alrededor del eje *z*, como lo ilustran las flechas curvas de la figura 3.12(d). Y para finalizar se sustituyen valores en la relación 3, así:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = +\mathbf{380}\boldsymbol{i} + \mathbf{240}\boldsymbol{j} + \mathbf{800}\boldsymbol{k}\ [\mathbf{Nm}]$$

3.10 Principio de transmisibilidad

El *principio de transmisibilidad* establece que una fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ aplicada en un punto *A* de un cuerpo rígido, como se ilustra en la figura 3.13, puede ser trasladada a un punto *B*, sobre la misma línea de acción, sin afectar el estado de equilibrio de dicho cuerpo. Se dice entonces que la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ que actúa en el punto *A* produce el mismo efecto al ser aplicada en el punto *B*, siempre que los puntos *A* y *B* se encuentren sobre la línea de acción de dicha fuerza.

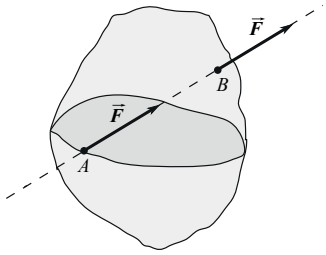


Figura 3.13

3.10.1 Ejemplo 3.3

La línea de acción de una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 150 N pasa por los puntos *A* y *B*, como se indica en la figura 3.14. Calcular el momento $\vec{M}_O$ de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al punto *O*: *a*) tomando como $\vec{r}$ el vector de posición del punto *A* y *b*) tomando como $\vec{r}$ el vector de posición del punto *B*. Comparar los resultados.

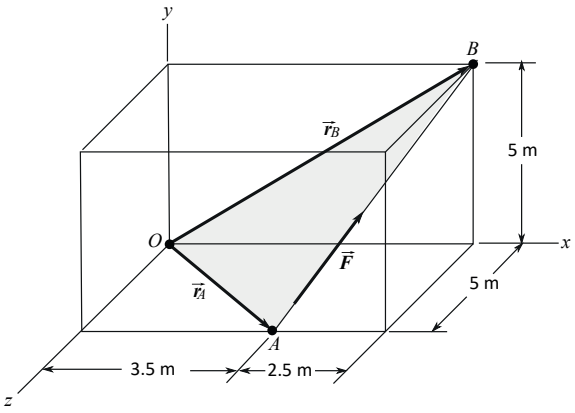


Figura 3.14

Solución (a)

Se encuentra el vector de posición del punto *A*, el cual está dado por $\vec{r}_A = 3.5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{k}$ [m], y se define un vector unitario $\vec{\lambda}_{AB}$ con los puntos *A* y *B* por donde pasa la fuerza $\vec{F}$, así:

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{2.5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2.5)^2 + (5)^2 + (5)^2}} = \frac{2.5}{7.5}\boldsymbol{i} + \frac{5}{7.5}\boldsymbol{j} - \frac{5}{7.5}\boldsymbol{k}$$

Se aplica la relación $\vec{F} = \vec{\lambda}_{AB} F$, siendo $F = 150$ N la magnitud de $\vec{F}$, así:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{2.5(150)}{7.5}\boldsymbol{i} + \frac{5(150)}{7.5}\boldsymbol{j} - \frac{5(150)}{7.5}\boldsymbol{k}\ [\text{N}] = 50\boldsymbol{i} + 100\boldsymbol{j} - 100\boldsymbol{k}\ [\text{N}]$$

Por último, se reemplazan valores en la ecuación de momento $\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\boldsymbol{r}}_A \times \vec{\boldsymbol{F}}$, realizando el respectivo producto vectorial:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3.5 & 0 & 5 \\ 50 & 100 & -100 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -500\boldsymbol{i} + 600\boldsymbol{j} + 350\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Solución (b)

El vector de posición correspondiente al punto B es $\vec{\boldsymbol{r}}_B = 6\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ [m], y al reemplazar valores en la ecuación de momento, $\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\boldsymbol{r}}_B \times \vec{\boldsymbol{F}}$, el resultado es:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 5 & 0 \\ 50 & 100 & -100 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -500\boldsymbol{i} + 600\boldsymbol{j} + 350\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Nótese que el momento $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ es igual si se toma como vector de posición $\vec{\boldsymbol{r}}_A$ o $\vec{\boldsymbol{r}}_B$, o en términos generales, puede ser el de cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$, dándole a $\vec{\boldsymbol{F}}$ la propiedad de ser un vector deslizante, lo cual pone de manifiesto el denominado principio de transmisibilidad al no variar el momento de la fuerza sobre el cuerpo rígido.

3.11 Principio de los momentos o teorema de Varignon

Considere una fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ y sean $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ y $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ sus componentes, o sea $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2$, como se muestra en la figura 3.15, y sea $\vec{\boldsymbol{r}}$ el vector de posición del punto de aplicación A de la fuerza con respecto a un punto de referencia O.

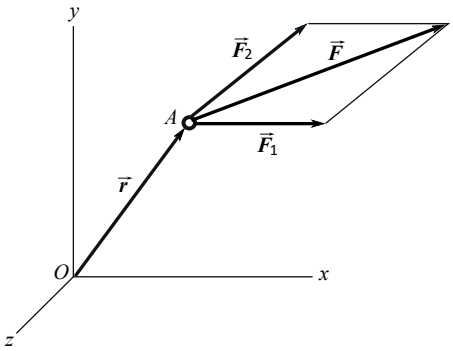


Figura 3.15

El *principio de los momentos,* también denominado teorema de Varignon, establece que el momento de una fuerza $\vec{F}$ con respecto a un punto *O* es igual a la suma de los momentos de las componentes con respecto al mismo punto. De tal manera que en forma vectorial se puede expresar como:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

El principio de los momentos se deriva de la propiedad distributiva de la suma del producto vectorial, dada mediante la relación 3.5, y es útil para hallar el momento de una fuerza $\vec{F}$, cuando resulte más conveniente definir los momentos de las componentes y sumarlas.

3.12 Momento de una fuerza en el plano

Considere una fuerza $\vec{F}$ de magnitud *F* que actúa en el punto *A* de una placa plana y sea $\vec{r}$ el vector de posición del punto *A* respecto del origen *O* de un sistema de coordenadas *xyz*, en donde el vector $\vec{r}$ y la fuerza $\vec{F}$ están contenidos en el plano *xy*, siendo por lo tanto perpendiculares al eje *z*, como se indica en la figura 3.16.

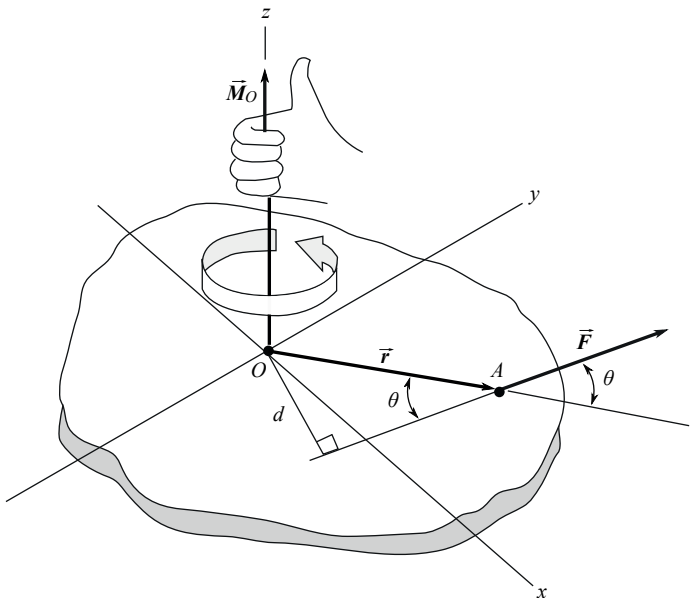


Figura 3.16

Teniendo en cuenta la definición dada en la sección 3.8, la fuerza $\vec{F}$ tiende a producir un movimiento de rotación de la placa alrededor del eje *z*, denominado momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al punto *O*, designado por $\vec{M}_O$, siendo un vector cuya dirección coincide con dicho eje de giro y su sentido se determina al aplicar la regla de la mano derecha, y el cual, conforme a la expresión 3.9, resulta:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

De acuerdo con la relación 3.10, la magnitud M_O del momento está dada por $M_O = rF\ sen\ \theta = Fd$, siendo $d = r\ sen\ \theta$ la distancia perpendicular desde el punto *O* hasta la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$, como se indica también en la figura 3.16.

Si se tienen varias fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, de magnitudes respectivas F_1, F_2 y F_3, en el plano *xy*, como se ilustra en la figura 3.17(a), y se cuenta con las correspondientes distancias perpendiculares d_1, d_2 y d_3, hasta el origen *O*, se puede obtener una solución escalar del momento resultante con respecto al punto *O* mediante la suma algebraica de los momentos de cada una de las fuerzas, así:

$$\sum M_O = +F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3 \tag{3.14}$$

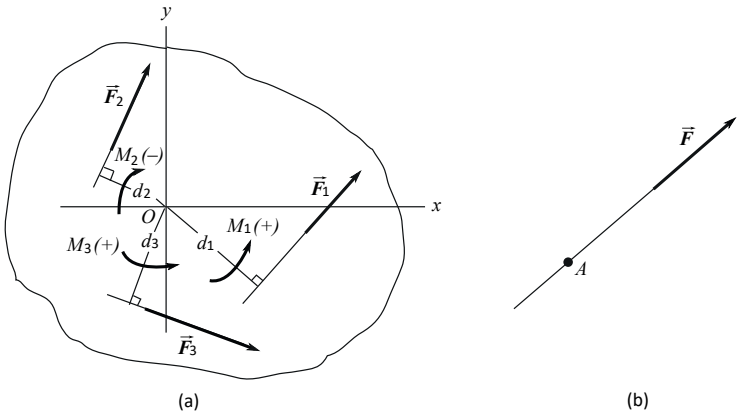


Figura 3.17

Lo anterior se cumple porque al tratarse de fuerzas contenidas en el mismo plano *xy*, los momentos con respecto al origen *O* son vectores cuyas direcciones coinciden con el eje *z*, aunque los signos se especifican conforme al sentido de giro, los cuales se determinan al aplicar la regla de la mano derecha.

De tal forma que, de acuerdo con lo mostrado en la figura 3.17(a), para las fuerzas que ocasionen giros antihorarios, como $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$, los vectores de sus momentos estarán señalando hacia afuera del plano *xy*, o eje positivo de las *z*, por lo cual se consideran positivos, mientras que los momentos de las fuerzas que causen giros horarios como $\vec{F}_2$ se tomarán

como negativos, porque los respectivos vectores de sus momentos estarán dirigidos hacia dentro de dicho plano *xy*, o eje negativo de las *z*.

Para el caso en que la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$ pase por un punto determinado *A*, como el mostrado en la figura 3.17(b), el momento con respecto a dicho punto es igual a cero porque, de acuerdo con la ecuación 3.10, le corresponde una distancia perpendicular *d* igual a cero, por tanto:

$$M_A = Fd = F(0) = 0$$

3.12.1 Ejemplo 3.4

El mástil *OA* de altura 8.66 m es sometido a una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 125 N aplicada en el punto *B* mediante una cuerda *BC*, la cual forma un ángulo de 60° con la horizontal, como se indica en la figura 3.18. Hallar el momento de la fuerza con respecto al punto *O*.

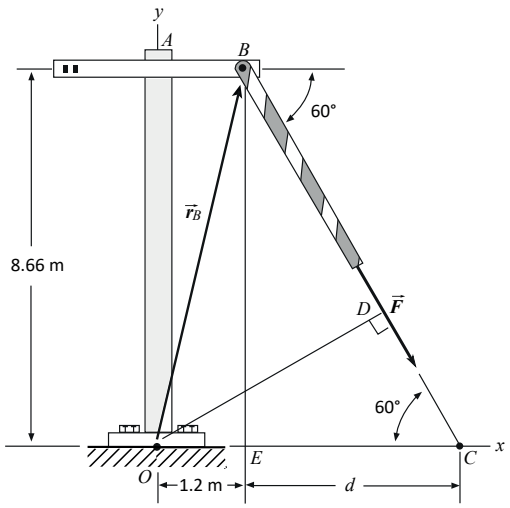


Figura 3.18

Solución (a) en forma vectorial

Se define el vector de posición $\vec{r}_B = 1.2\boldsymbol{i} + 8.66\boldsymbol{j}$ [m] y la fuerza $\vec{F}$ en forma vectorial, como se aprecia en la figura 3.18, así:

$$\vec{F} = 125\ cos\ 60°\boldsymbol{i} - 125\ sen\ 60°\boldsymbol{j}\ [\text{N}] = 62.5\boldsymbol{i} - 108.25\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$

Y al sustituir en la ecuación de momento, $\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{F}$, se obtiene:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1.2 & 8.66 & 0 \\ 62.5 & -108.25 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + (-129.9 - 541.25)\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = -\mathbf{671.15}\,\boldsymbol{k}\ [\mathbf{Nm}]$$

Solución (b) en forma escalar

Para obtener una solución escalar es necesario multiplicar la magnitud de 125 N de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ por la distancia perpendicular OD, de acuerdo con la figura 3.18. Sin embargo, teniendo en cuenta que en el triángulo rectángulo ODC se tiene que $OD = OC\ sen\ 60° = (1.2\ \text{m} + d)\ sen\ 60°$ y con base en el triángulo rectángulo BEC, $d = 8.66\ \text{m}/tan\ 60° = 5\ \text{m}$, al reemplazar resulta $OD = (1.2\ \text{m} + 5\ \text{m})\ sen\ 60° = 5.37\ \text{m}$. Y dado que la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ produce un momento en sentido horario, o sea negativo, su valor se expresa así:

$$M_O = -(125\ \text{N})(OD) = -(125\ \text{N})(5.37\ \text{m}) = -671.25\ \text{Nm} \qquad \boldsymbol{M_O = -671.25\ Nm}$$

Solución (c) en forma escalar, al aplicar el principio de los momentos

Debido a que la línea de acción de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ pasa por el punto C, como se indica en la figura 3.19, se puede calcular el respectivo momento en forma escalar, mediante el principio de los momentos o teorema de Varignon, al descomponer la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ según los ejes x y y, así:

$$\sum M_O = -(125\ \text{N}\ sen\ 60°)(6.2\ \text{m}) + (125\ \text{N}\ cos\ 60°)(0) = -671.15\ \text{Nm} \qquad \boldsymbol{M_O = -671.15\ Nm}$$

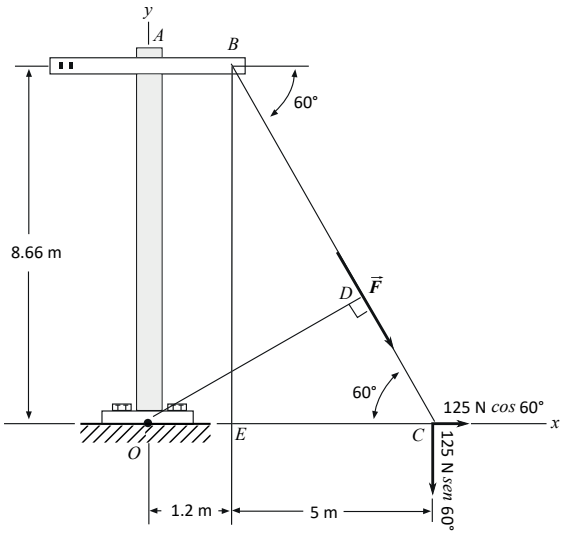


Figura 3.19

Nótese que para obtener la solución vectorial, dada en el numeral (a), se puede utilizar tanto el vector de posición $\vec{r}_B$ como el de posición $\vec{r}_C$; asimismo, para determinar la solución escalar, mediante el principio de los momentos, correspondiente al numeral (c), se descompone la fuerza $\vec{F}$, bien sea en el punto *C*, como se realizó, o también en el punto *B*, al tener en cuenta que la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$ pasa también por dicho punto, por lo que al aplicar la propiedad de ser un vector deslizante, en relación con el momento con respecto a un punto, dada mediante el principio de transmisibilidad, conduce al mismo resultado, si se calcula al tomar cualquiera de los puntos por donde cruce dicha fuerza.

3.13 Producto escalar de dos vectores

El *producto escalar de dos vectores* $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$, denominado también producto punto, se define como el producto de las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el coseno del ángulo θ que existe entre ellos, como se indica en la figura 3.20, el cual se expresa así:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \tag{3.15}$$

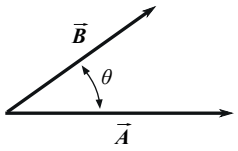


Figura 3.20

De acuerdo con la definición, nótese que el resultado del producto escalar es un escalar y no un vector, como su nombre lo indica, por lo que además puede ser positivo o negativo.

3.14 Propiedades del producto escalar

Teniendo en cuenta que las siguientes relaciones son válidas, se afirma que el producto escalar cumple con la propiedad conmutativa, así como con la propiedad distributiva:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = AB \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{A} \cdot \vec{B}_1 + \vec{A} \cdot \vec{B}_2$$

3.15 Producto escalar de los vectores unitarios

Al establecer los vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ según los ejes x, y y z, respectivamente, y al aplicar la relación 3.15 sabiendo que $cos\ 90° = 0$ para los productos entre vectores unitarios diferentes y $cos\ 0° = 1$ para los vectores iguales, entonces, el producto escalar de cada dos de ellos está dado por:

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1 \qquad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \qquad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{3.16}a$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \qquad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1 \qquad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{3.16}b$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \qquad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \qquad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{3.16}c$$

3.16 Producto escalar en forma de componentes

Al expresar los vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ en función de sus componentes rectangulares y realizar el producto escalar $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$, se tiene:

$$\vec{\boldsymbol{A}} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) \cdot (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k})$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = A_x\boldsymbol{i} \cdot B_x\boldsymbol{i} + A_x\boldsymbol{i} \cdot B_y\boldsymbol{j} + A_x\boldsymbol{i} \cdot B_z\boldsymbol{k}$$
$$+ A_y\boldsymbol{j} \cdot B_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} \cdot B_y\boldsymbol{j} + A_y\boldsymbol{j} \cdot B_z\boldsymbol{k}$$
$$+ A_z\boldsymbol{k} \cdot B_x\boldsymbol{i} + A_z\boldsymbol{k} \cdot B_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \cdot B_z\boldsymbol{k}$$

Al reemplazar de acuerdo con las relaciones 3.16 y agrupar:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

3.17 Aplicaciones del producto escalar

El producto escalar tiene las dos siguientes importantes aplicaciones:

1. *Determinar el ángulo entre dos vectores:* dados los vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$, el ángulo θ existente entre ellos se puede encontrar mediante la definición del producto escalar, así:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = AB\ cos\ \theta \qquad cos\ \theta = \frac{\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}}{AB} \qquad \theta = cos^{-1}\left(\frac{\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}}{AB}\right) \tag{3.17}$$

2. *Hallar el valor de la proyección de un vector sobre otro:* dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se puede determinar el valor que proyecta $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$, denominado también componente escalar de $\vec{B}$ en la dirección de $\vec{A}$, el cual es igual a $B\ cos\ \theta$, como se aprecia en la figura 3.21, así:

$$Proy(\vec{B}/\vec{A}) = B\ cos\ \theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A} = \vec{\lambda}_A \cdot \vec{B} \tag{3.18}$$

Siendo $\vec{\lambda}_A = \vec{A}/A$ el vector unitario en la dirección de $\vec{A}$.

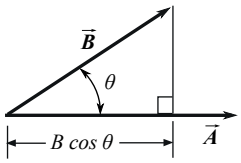


Figura 3.21

3.17.1 Ejemplo 3.5

Teniendo en cuenta los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ de acuerdo con el sólido mostrado en la figura 3.22, hallar: *a*) el ángulo θ entre ellos y *b*) el valor de la proyección del vector $\vec{AB}$ sobre el vector $\vec{AC}$.

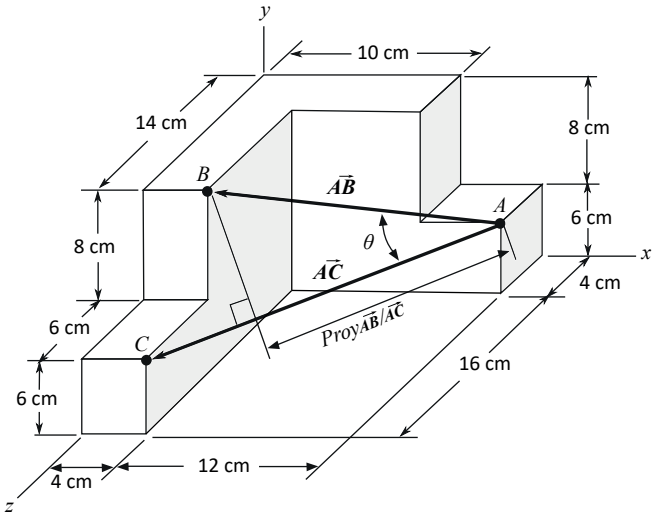


Figura 3.22

Solución (a)

Se expresan inicialmente $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$, y se realiza el producto escalar, así:

$$\overrightarrow{AB} = -12\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}\ [\text{cm}] \qquad \overrightarrow{AC} = -12\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{k}\ [\text{cm}]$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \big((-12)(-12) + (8)(0) + (10)(16)\big)\ \text{cm}^2 = 304\ \text{cm}^2$$

$$AB = \sqrt{(-12)^2 + 8^2 + 10^2}\ \text{cm} = 17.55\ \text{cm} \qquad AC = \sqrt{(-12)^2 + 16^2}\ \text{cm} = 20\ \text{cm}$$

Se utiliza la expresión 3.17 para definir el ángulo entre dos vectores y, al reemplazar valores, se tiene:

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{(AB)(AC)}\right) = cos^{-1}\left(\frac{304\ \text{cm}^2}{(17.55\ \text{cm})(20\ \text{cm})}\right) = 30° \quad \boldsymbol{\theta = 30°}$$

Solución (b)

Según la expresión 3.18, la proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector $\overrightarrow{AC}$ está dada por:

$$Proy(\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC}) = \vec{\lambda}_{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \tag{1}$$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{(-12\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{k})\ [\text{cm}]}{20\ \text{cm}} = -0.6\boldsymbol{i} + 0.8\boldsymbol{k}$$

Al reemplazar en la ecuación 1:

$$Proy(\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC}) = \big((-12\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k})[\text{cm}]\big) \cdot (-0.6\boldsymbol{i} + 0.8\boldsymbol{k}) = 15.2\ \text{cm} \quad \boldsymbol{Proy(\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC}) = 15.2\ cm}$$

3.18 Momento de una fuerza con respecto a un eje dado

Se ha visto, en la sección 3.8, que una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto *A* de un cuerpo rígido tiende a producir una rotación del cuerpo alrededor de un eje *EE'*, el cual es perpendicular al plano formado por la fuerza $\vec{F}$ y un vector $\vec{r}$, siendo $\vec{r}$ el vector de posición del punto *A* con respecto a un punto *O*, localizado sobre dicho eje *EE'*.

Tal efecto se representa por el vector $\vec{M}_O$, expresado por $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$, cuyo sentido es tal que cumple con la regla de la mano derecha y su dirección coincide con el mencionado eje *EE'*, como se observa en la figura 3.23.

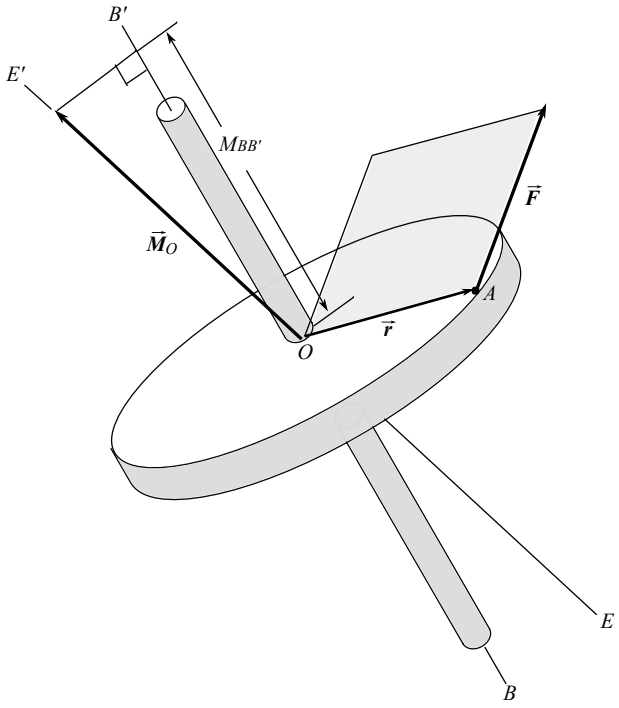


Figura 3.23

Cuando la dirección del eje de rotación natural *BB'* del cuerpo no coincide con el eje de rotación *EE'* causado por el momento $\vec{M}_O$, como se ilustra en la figura 3.23, entonces es necesario medir el efecto que produce la fuerza $\vec{F}$ alrededor del eje *BB'* del cuerpo. Tal acción corresponde al momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al eje dado *BB'*, o sea el valor de la componente de $\vec{M}_O$ en la dirección del eje de giro *BB'* del cuerpo. De acuerdo con la ecuación 3.18, dicha magnitud se encuentra mediante el producto escalar del vector unitario $\vec{\lambda}_{BB}$ en la dirección del eje *BB'* por el vector del momento $\vec{M}_O$, así:

$$M_{BB'} = \vec{\lambda}_{BB'} \cdot \vec{M}_o = \vec{\lambda}_{BB'} \cdot \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) \tag{3.19}$$

Por ser $M_{BB'}$ un escalar, puede ser positivo o negativo. Al obtenerse un valor negativo, como resultado de la aplicación de la relación 3.19, es solo indicativo de que el sentido escogido para el vector $\vec{\lambda}_{BB'}$ es opuesto al requerido.

3.18.1 Ejemplo 3.6

Una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 270 N es aplicada al punto *C* de coordenadas (8, 16, 8) [m], perteneciente a una rueda cuyo eje de giro pasa por los puntos *A* y *B*, como se muestra en la figura 3.24. Determinar el momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al eje *AB*.

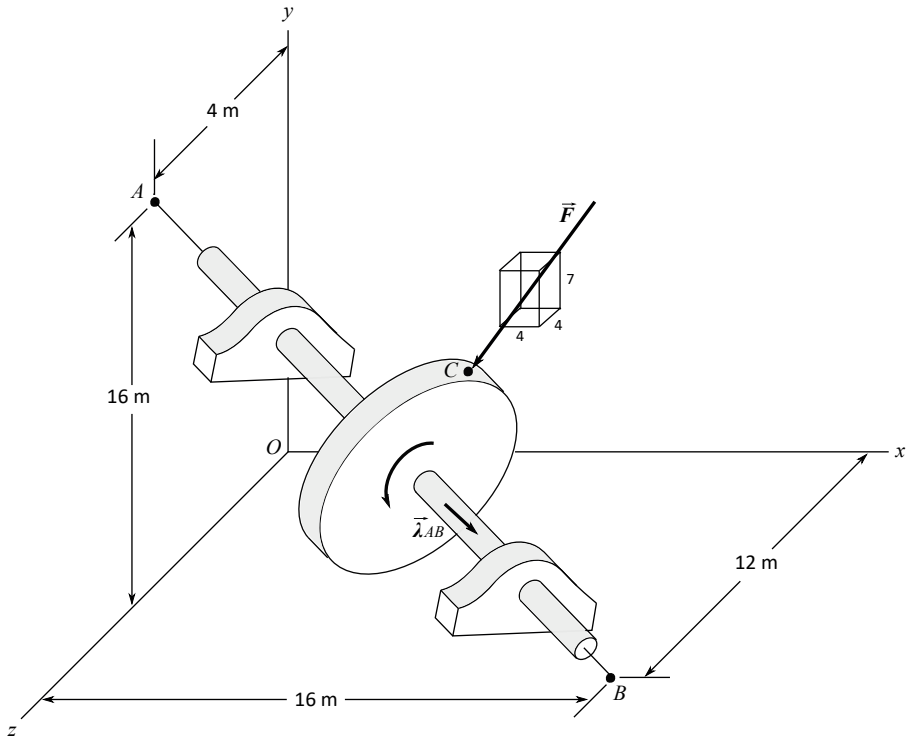


Figura 3.24

Solución

En forma general, el procedimiento para determinar el momento de una fuerza $\vec{F}$ con respecto a un eje dado *AB* consiste en definir primero el momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto a un punto cualquiera *A* o *B* del eje, y aplicar después la ecuación 3.18, así:

$$M_{AB} = \vec{\lambda}_{AB} \cdot \vec{M}_A = \vec{\lambda}_{AB} \cdot \vec{M}_B \tag{1}$$

Para calcular el momento de una fuerza con respecto a un punto *A* o *B*, se utiliza la ecuación 3.9, dada por:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} \qquad \vec{M}_B = \vec{r}_{BC} \times \vec{F} \tag{2}$$

Con base en la figura 3.24, se definen las coordenadas de A (0, 16, 4) [m] y B (16, 0, 12) [m], y dadas las coordenadas del punto C como (8, 16, 8) [m], se determinan:

$$\vec{r}_{AC} = 8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}\ [\text{m}] \qquad \vec{r}_{BC} = -8\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}\ [\text{m}]$$

La fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ se expresa en términos de su magnitud F y un vector unitario $\vec{\boldsymbol{\lambda}}$, en la dirección de $\vec{\boldsymbol{F}}$, al aplicar la relación 2.32, así:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\lambda}} F \tag{3}$$

La magnitud de $\vec{\boldsymbol{F}}$ está dada por F = 270 N y el vector $\vec{\boldsymbol{\lambda}}$ se obtiene del pequeño paralelepípedo mostrado en la figura 3.24, para indicar la dirección de $\vec{\boldsymbol{F}}$, o sea:

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{-4\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{-4\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}}{9}$$

Al sustituir valores en la ecuación 3 y después en la 2, se da:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -120\boldsymbol{i} - 210\boldsymbol{j} + 120\boldsymbol{k}\ [\text{N}]$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_A = \vec{\boldsymbol{r}}_{AC} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 0 & 4 \\ -120 & -210 & 120 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 840\boldsymbol{i} - 1\,440\boldsymbol{j} - 1\,680\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_B = \vec{\boldsymbol{r}}_{BC} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -8 & 16 & -4 \\ -120 & -210 & 120 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 1\,080\boldsymbol{i} + 1\,440\boldsymbol{j} + 3\,600\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Con las coordenadas de los puntos A y B, se halla:

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}{AB} = \frac{16\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j} + \boldsymbol{8k}}{\sqrt{16^2 + 16^2 + 8^2}} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}$$

Entonces, al reemplazar en la ecuación 1, se tiene:

$$M_{AB} = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB} \cdot \vec{\boldsymbol{M}}_A = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}\right) \cdot (840\boldsymbol{i} - 1\,440\boldsymbol{j} - 1\,680\boldsymbol{k})\ [\text{Nm}]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)(840) + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1\,440) + \left(\frac{1}{3}\right)(-1\,680)\ [\text{Nm}] = 960\ \text{Nm} \quad \boldsymbol{M_{AB} = 960\ \text{Nm}}$$

$$M_{AB} = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_{AB} \cdot \vec{\boldsymbol{M}}_B = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}\right) \cdot (1\,080\boldsymbol{i} + 1\,440\boldsymbol{j} + 3\,600\boldsymbol{k})\ [\text{Nm}]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)(1\,080) + \left(-\frac{2}{3}\right)(1\,440) + \left(\frac{1}{3}\right)(3\,600)\ [\text{Nm}] = 960\ \text{Nm} \quad \boldsymbol{M_{AB} = 960\ \text{Nm}}$$

Dado que el resultado es el mismo, para ambos casos, se observa que al aplicar la ecuación 1 se puede obtener el momento con respecto al eje *AB*, al calcular primero el momento con respecto a un punto, *A* o *B*, o en general con respecto a cualquier punto localizado sobre la línea de acción del eje *AB*, y seguidamente multiplicar escalarmente por el vector unitario en la dirección *AB*.

Nótese, además, que el momento obtenido fue positivo, lo cual significa que el sentido de giro causado a la rueda corresponde al mismo sentido del vector $\vec{\lambda}_{AB}$, como se aprecia en la figura 3.24, de acuerdo con la regla de la mano derecha. En caso de resultar negativo, dicho valor del momento solo indica que el sentido escogido del vector $\vec{\lambda}_{AB}$ es el invertido.

3.19 Momento de un par

Por definición, un par está formado por dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ de igual magnitud y sentidos opuestos, cuyas líneas de acción son paralelas y separadas una distancia perpendicular determinada *d*, como se ilustra en la figura 3.25.

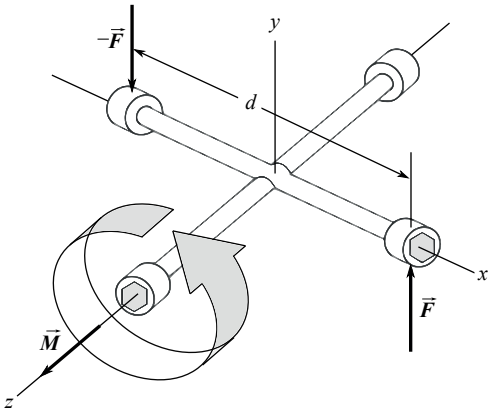


Figura 3.25

El par de fuerzas tiene las siguientes características:

— No produce efecto de traslación alguno, porque la sumatoria de las fuerzas que lo conforman, $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ con respecto a cualquier punto, da una resultante igual a cero.
— Solamente ocasiona acción de rotación, representado por un vector $\vec{M}$ denominado momento del par, lo cual tiene importantes aplicaciones prácticas, como en el caso de la llave de cruz mostrada en la figura 3.25, usada para soltar o apretar las tuercas de las ruedas de un vehículo.

El momento $\vec{M}$ del par se halla al realizar la sumatoria de momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto *O*, de acuerdo con la figura 3.26(a), así:

$$\sum \vec{M}_O: \ \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} - \vec{r}_B \times \vec{F} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Siendo $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ el vector que va desde el punto *B* hasta el punto *A* y el momento del par está dado por:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.20}$$

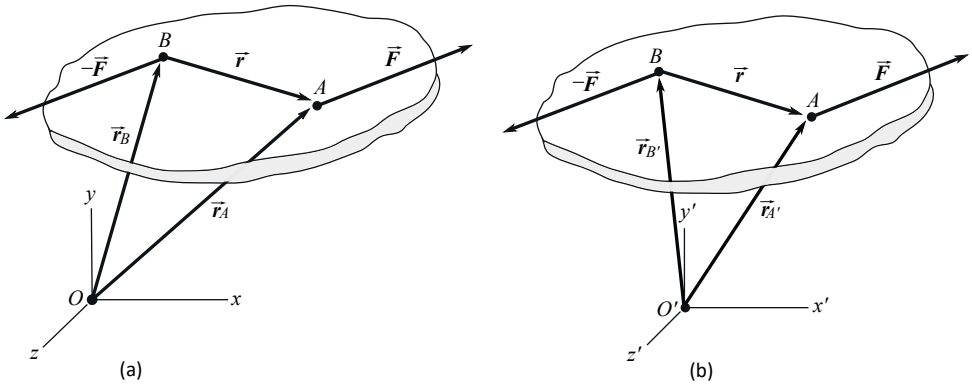


Figura 3.26

Al realizar nuevamente la sumatoria de momentos del par con respecto a un punto de referencia *O'* diferente de *O*, tal como se muestra en la figura 3.26(b), se obtiene el siguiente resultado:

$$\sum \vec{M}_{O'}: \ \vec{r}'_A \times \vec{F} + \vec{r}'_B \times (-\vec{F}) = \vec{r}'_A \times \vec{F} - \vec{r}'_B \times \vec{F} = (\vec{r}'_A - \vec{r}'_B) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Siendo $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ el vector que va desde el punto *B* hasta el punto *A* y el nuevo momento del par está dado por:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.21}$$

Comparando las relaciones 3.20 y 3.21, se observa que el resultado es el mismo independientemente del punto de referencia escogido, por lo tanto, el momento $\vec{M}$ del par produce el mismo efecto en cualquier punto que se aplique, lo cual significa que es un vector libre.

Por otro lado, y de acuerdo con la definición del momento $\vec{M}$ del par, su magnitud se puede expresar así:

$$M = rFsen\,\theta = Fd \tag{3.22}$$

Siendo d la distancia entre las líneas de acción de $\vec{F}$ y $-\vec{F}$, conforme a la figura 3.27.

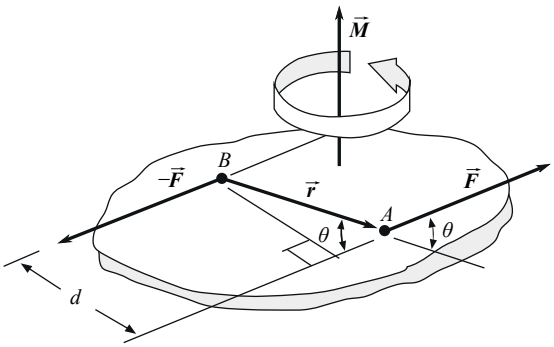


Figura 3.27

Además, el momento $\vec{M}$ del par, como se indica en la figura 3.27, es un vector que actúa en la dirección perpendicular al plano donde se encuentran $\vec{F}$ y $-\vec{F}$, y su sentido es tal que cumple con la regla de la mano derecha.

3.20 Suma de pares

El par puede ser representado por un vector $\vec{M}$, correspondiente al momento del par, el cual como ya se ha visto es perpendicular al plano donde se encuentran las fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ que lo originan, de sentido tal que cumple con la regla de la mano derecha; y debido a que es un vector libre, puede ser colocado a partir de un punto común con otro par y ser sumados vectorialmente para hallar un par resultante o equivalente, el cual produce el mismo efecto de rotación que los dos pares aplicados en su conjunto. Tal procedimiento será explicado en el siguiente ejemplo.

3.20.1 Ejemplo 3.7

Hallar el par equivalente a los dos pares aplicados al sólido de la figura 3.28.

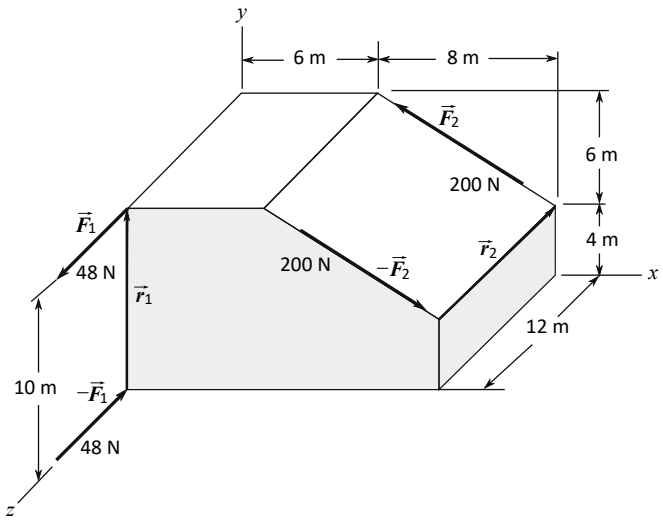


Figura 3.28

Solución

Se designan los momentos de los pares y se aplica la relación 3.20, así:

$\vec{M}_1$ = momento del par de 48 N $\qquad$ $\vec{M}_2$ = momento del par de 200 N

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \qquad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

El procedimiento para hallar el momento de un par consiste en seleccionar primero una de las dos fuerzas $\vec{F}$ y escoger después el vector $\vec{r}$, que apunte hacia dicha fuerza, para poder calcular $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Por ejemplo, en el caso específico del par de 48 N, si se escoge la fuerza $\vec{F}_1 = 48\ \text{N}\boldsymbol{k}$, dirigida hacia el lado positivo del eje *z*, como se indica en la figura 3.28, le corresponde $\vec{r}_1 = 10\ \text{m}\boldsymbol{j}$, porque apunta hacia la fuerza escogida, por tanto:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 480\boldsymbol{i}\ [\text{Nm}]$$

En cuanto al par de 200 N, se ha elegido $\vec{F}_2$ orientado hacia el lado positivo del eje *y*, a la cual le corresponde $\vec{r}_2 = -12\ \text{m}\boldsymbol{k}$, por estar dirigida hacia $\vec{F}_2$, como se aprecia en la figura 3.28, siendo:

$$\vec{F}_2 = \vec{\lambda}_2 F_2 = \left(\frac{-8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}}{\sqrt{8^2 + 6^2}}\right)(200\ \text{N}) = -160\boldsymbol{i} + 120\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -12 \\ -160 & 120 & 0 \end{bmatrix} \text{[Nm]} = 1\,440i + 1\,920j \text{ [Nm]}$$

Una vez se han determinado los momentos de los pares, en forma vectorial y por el hecho de ser vectores libres, se pueden colocar a partir de un mismo punto para sumarlos y obtener un momento resultante, como se muestra en la figura 3.29(a), en donde se ha escogido un punto común arbitrario *A*.

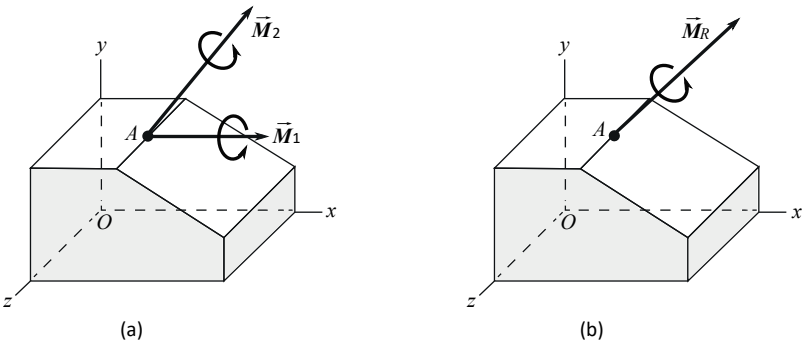


Figura 3.29

El momento del par resultante $\vec{M}_R$, o momento del par equivalente, ubicado en el punto *A*, como se aprecia en la figura 3.29(b), está dado por:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 1\,920i + 1\,920j \text{ [Nm]} \qquad \vec{M}_R = \mathbf{1\,920}i + \mathbf{1\,920}j \text{ [Nm]}$$

3.21 Sistemas equivalentes de fuerzas

Los sistemas aplicados a un cuerpo rígido se caracterizan por su tendencia a producir acciones de traslación, debidas a las fuerzas que intervienen, y también de rotación, ocasionados por los momentos de estas fuerzas, con respecto a un punto determinado. En lo que concierne al equilibrio de un cuerpo rígido, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a producir los mismos efectos de traslación y las mismas acciones de rotación sobre dicho cuerpo.

En forma de ecuaciones, se puede expresar que dos sistemas aplicados a un cuerpo rígido son equivalentes si la sumatoria de las fuerzas y la sumatoria de los momentos con respecto a un punto *O* son iguales respectivamente, o sea:

$$(\sum \vec{F})_1 = (\sum \vec{F})_2 \qquad (\sum \vec{M}_o)_1 = (\sum \vec{M}_o)_2 \tag{3.23}$$

Se puede demostrar que si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes con respecto a un punto *O*, también lo son con respecto a cualquier punto *O'*. Expresando la relación 3.23 en términos de sus componentes rectangulares según los ejes *x, y* y *z*, tenemos:

$$(\sum F_x)_1 = (\sum F_x)_2 \quad (\sum F_y)_1 = (\sum F_y)_2 \quad (\sum F_z)_1 = (\sum F_z)_2$$
$$(\sum M_x)_1 = (\sum M_x)_2 \quad (\sum M_y)_1 = (\sum M_y)_2 \quad (\sum M_z)_1 = (\sum M_z)_2$$

Lo cual indica que dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a producir los mismos efectos de traslación, al comparar componente a componente, y también las mismas acciones de rotación componente a componente, de acuerdo con los ejes *x, y* y *z*, respectivamente.

3.21.1 Ejemplo 3.8

Dos fuerzas de 100 N y 150 N son aplicadas a la viga *OA* como se indica en la figura 3.30(a): *a*) hallar la fuerza $\vec{F}$ y la correspondiente distancia *x*, de acuerdo con la figura 3.30(b), para que los dos sistemas sean equivalentes con respecto al punto *O*, y *b*) demostrar que los dos sistemas también son equivalentes con respecto al punto *A*.

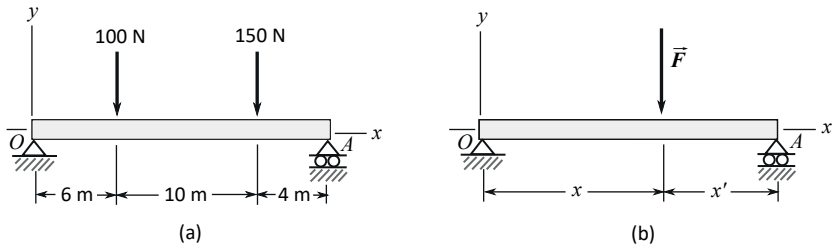


Figura 3.30

Solución (a)

Los dos sistemas son equivalentes con respecto al punto *O* si y solo si se cumplen las igualdades 3.23 dadas por:

$$(\sum \vec{F})_1 = (\sum \vec{F})_2 \quad (\sum \vec{M}_o)_1 = (\sum \vec{M}_o)_2$$

Al igualar las fuerzas en los dos sistemas, se determina la fuerza $\vec{F}$, así:

$$-100\ \text{N}\boldsymbol{j} - 150\ \text{N}\boldsymbol{j} = -250\ \text{N}\boldsymbol{j} = \vec{F} \qquad \vec{F} = -\mathbf{250\ N}\boldsymbol{j}$$

Al tomar momentos con respecto al punto *O* e igualar:

$$(\sum \vec{\boldsymbol{M}}_o)_1 = -(6\text{ m})(100\text{ N})\boldsymbol{k} - (16\text{ m})(150\text{ N})\boldsymbol{k} = -3\,000\text{ Nm}\boldsymbol{k}$$

$$(\sum \boldsymbol{M}_o)_2 = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -250 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -250x\boldsymbol{k}\,[\text{N}]$$

$$-3\,000\text{ Nm} = -250x\text{ N} \quad \boldsymbol{x = 12\text{ m}}$$

Se concluye que la fuerza de 250 N aplicada a una distancia de 12 m, relativa al punto *O*, como se indica en la figura 3.30(b), es equivalente a las dos fuerzas de 100 N y 150 N, actuando a las respectivas distancias de 6 m y 16 m, relativas al mismo punto *O*, como se ilustra en la figura 3.30(a).

Solución (b)

Los dos sistemas son equivalentes con respecto al punto *A* si y solo si se cumplen las igualdades 3.23, por tanto:

$$(\sum \vec{\boldsymbol{F}})_1 = (\sum \vec{\boldsymbol{F}})_2 \qquad (\sum \vec{\boldsymbol{M}}_A)_1 = (\sum \vec{\boldsymbol{M}}_A)_2$$

Al igualar las fuerzas se calcula que el valor de $\vec{\boldsymbol{F}}$ es el mismo, o sea:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{-250\text{ N}j}$$

Tomando momentos con respecto al punto *A* e igualando:

$$(\sum \vec{\boldsymbol{M}}_A)_1 = +(14\text{ m})(100\text{ N})\boldsymbol{k} + (4\text{ m})(150\text{ N})\boldsymbol{k} = +2\,000\text{ Nm}\boldsymbol{k}$$

$$(\sum \vec{\boldsymbol{M}}_A)_2 = \vec{\boldsymbol{r}}' \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x' & 0 & 0 \\ 0 & -250 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -250x'\boldsymbol{k}\,[\text{Nm}]$$

$$+2\,000\text{ Nm} = -250x'\text{ N} \quad \boldsymbol{x' = -8\text{ m}}$$

El signo negativo de *x'*, como se aprecia en la figura 3.30(b), indica que la distancia se encuentra a la izquierda del punto *A*, por tanto, se demuestra que la posición de la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ es la misma, independiente del punto de referencia, o sea, los dos sistemas son equivalentes con respecto a *O* y también respecto a un punto diferente *A*.

3.22 Sistema fuerza-par equivalente

Una fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ que actúa en un punto *A* de un cuerpo rígido, como se indica en la figura 3.31(a), es equivalente a la misma fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$ aplicada en un punto diferente *O*, como se muestra en la figura 3.31(b), si se le adiciona un par de momento $\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$, siendo $\vec{\boldsymbol{r}}$ el vector de posición del punto *A* respecto del punto *O*.

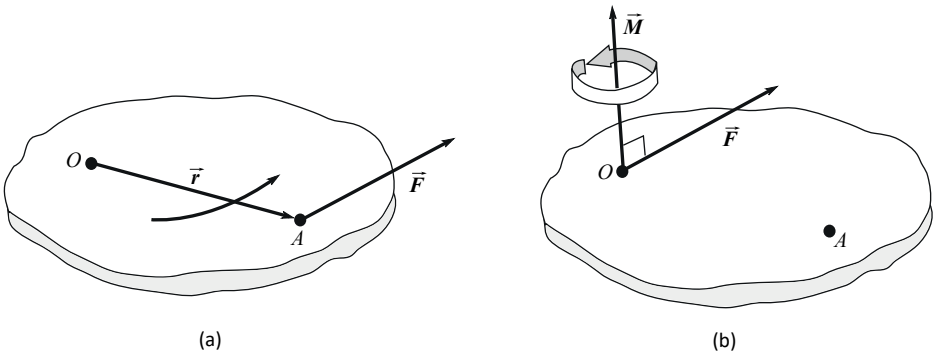


Figura 3.31

Al conjunto así formado en el punto *O*, como se aprecia en la figura 3.31(b), compuesto por la fuerza $\vec{F}$, que produce el efecto de traslación y el par de momento $\vec{M}$, que representa la acción de rotación, se le denomina *sistema fuerza-par equivalente,* porque produce los mismos efectos de traslación y de rotación que la fuerza original $\vec{F}$ aplicada en el punto *A*, por tanto, no afecta el estado de equilibrio del cuerpo rígido, sobre el cual actúa.

3.22.1 Demostración

Se igualan tanto las fuerzas como los momentos, en los puntos *A* y *O*, de acuerdo con las relaciones 3.23 dadas por:

$$(\sum\vec{F})_1 = (\sum\vec{F})_2 \quad (\sum\vec{M}_o)_1 = (\sum\vec{M}_o)_2$$

En lo referente a las fuerzas se tiene:

$$(\sum\vec{F})_1 = (\sum\vec{F})_2 = \vec{F}$$

Indicando que la acción de traslación es la misma puesto que la fuerza $\vec{F}$ es igual en ambos casos, como se muestra en las figuras 3.31(a) y 3.31(b). Al tomar momentos e igualar:

$$(\sum\vec{M}_o)_1 = \vec{r}\times\vec{F} \qquad (\sum\vec{M}_o)_2 = \vec{M} \qquad \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

Dando como resultado que se obtiene el mismo efecto de rotación, al ser iguales el momento $\vec{M}$ del par y el momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al punto *O*, dado por $\vec{r}\times\vec{F}$, siendo $\vec{r}$ el vector de posición del punto *A* respecto del punto *O*, como se aprecia en la figura 3.31(a).

Como características del sistema fuerza-par equivalente se deben tener en cuenta las siguientes:

— Por ser el momento $\vec{M}$ del par un vector libre, produce el mismo efecto si se coloca en el punto *O*, en el punto *A* o en cualquier otro punto del cuerpo.
— Siendo el momento del par $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, resulta ser un vector perpendicular al plano donde se encuentran $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

El proceso de trasformar una fuerza $\vec{F}$, aplicada en un punto *A*, como se muestra en la figura 3.31(a), en un sistema fuerza-par equivalente, formado por la misma fuerza $\vec{F}$ y un par de momento $\vec{M}$, que actúa en un punto *O*, como se aprecia en la figura 3.31(b), los cuales resultan ser respectivamente perpendiculares, se puede utilizar de manera inversa para convertir un sistema fuerza-par equivalente, aplicado en un punto determinado *O*, en una sola fuerza $\vec{F}$ que actúa en un punto *A*, con la condición de que la fuerza $\vec{F}$ se pueda trasladar en un plano perpendicular al momento $\vec{M}$, hasta el punto donde se genere un momento igual al momento $\vec{M}$ del par, que se desea eliminar —tales procedimientos se estudiarán más adelante en la sección 3.24—.

Con el fin de visualizar de forma práctica el procedimiento de convertir una fuerza $\vec{F}$ en un sistema fuerza-par equivalente, considere una varilla delgada *OABC* en forma de T, de peso despreciable, la cual se puede deslizar sin rozamiento entre dos collarines fijos *B* y *C*, con un tope en el punto *D*, como se indica en la figura 3.32(a).

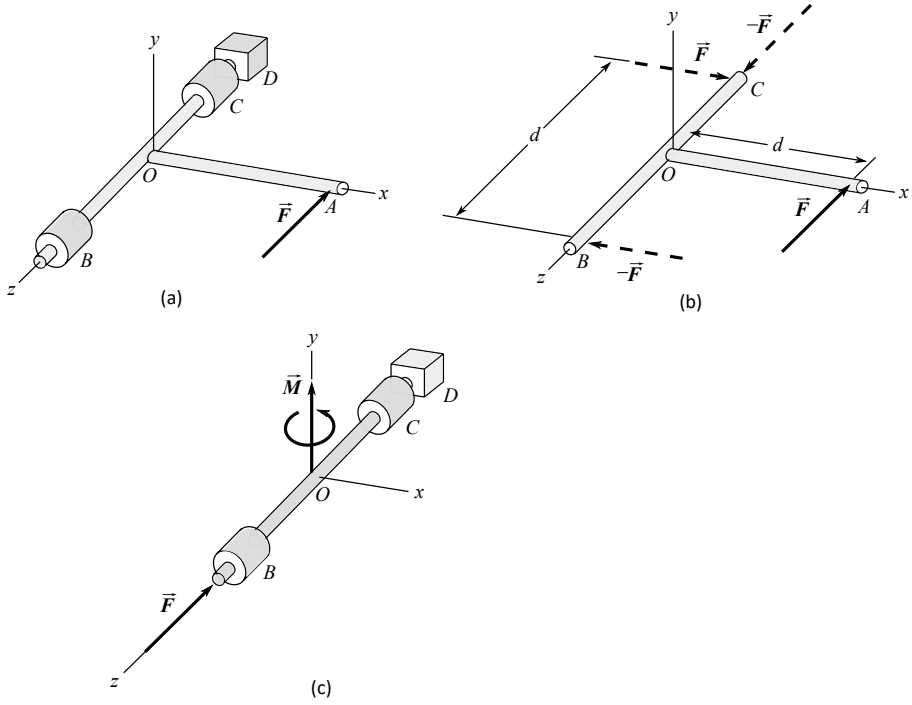


Figura 3.32

Se aplica una fuerza $\vec{F}$ en el punto *A*, por lo que de no existir el tope *D*, la varilla se desplazaría libremente, indicando que dicho tope le ofrece una fuerza de reacción $-\vec{F}$, igual y de sentido contrario, para impedir el efecto de traslación ocasionado por la fuerza $\vec{F}$, como se muestra en la figura 3.32(b).

Al mismo tiempo, la fuerza $\vec{F}$ aplicada en *A* y la reacción $-\vec{F}$ en el tope *D* generan un par de momento $\vec{M}$, cuya magnitud es $M = Fd$, siendo *F* la magnitud de $\vec{F}$ y *d* la distancia *OA*, aunque dicho momento es compensado por un par de igual magnitud y sentido contrario, ocasionado por los collarines *B* y *C*.

Al prescindir de la sección *OA* de la varilla, como se aprecia en la figura 3.32(c), se observa que, para mantener los mismos efectos de traslación y de rotación, en la parte restante, es necesario aplicar la fuerza original $\vec{F}$ en la dirección de la reacción del tope *D* y, además, ejercer un par de momento $\vec{M}$, igual y de sentido contrario al ofrecido por los collarines *B* y *C*.

Asimismo, por el principio de transmisibilidad, la fuerza $\vec{F}$ se puede trasladar al punto *O*, en donde, junto con el par de momento $\vec{M}$, forman un sistema fuerza-par equivalente a la fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto *A*.

3.22.2 Ejemplo 3.9

Convertir la fuerza $\vec{F}$ de magnitud 100 N aplicada en el punto *A*, cuya línea de acción pasa por los puntos *A* y *D*, como se muestra en la figura 3.33(a), en un sistema fuerza-par equivalente en el punto *B*.

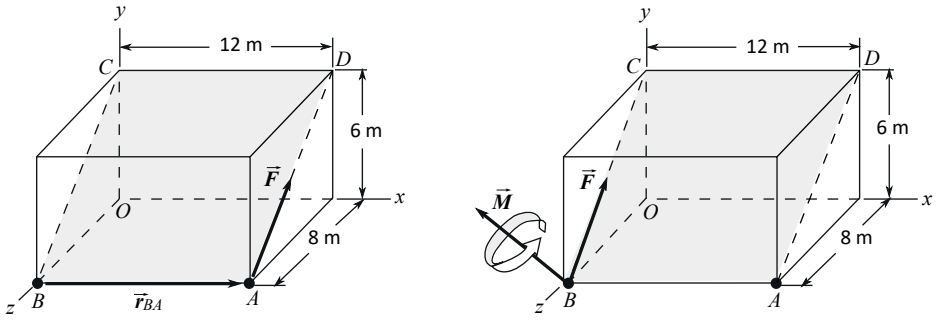


Figura 3.33

Solución

La fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto *A*, como se muestra en la figura 3.33(a), se expresa en forma vectorial, mediante la relación 2.32, así:

$$\vec{F} = \vec{\lambda}_{AD} F \tag{1}$$

Siendo $\vec{\lambda}_{AD}$ el vector unitario en la dirección *AD* y *F* = 100 N, la magnitud de $\vec{F}$:

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{6\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}}{10}$$

Al sustituir valores en la ecuación 1:

$$\vec{F} = 60\boldsymbol{j} - 80\boldsymbol{k}\ [\text{N}]$$

Se define $\vec{r}_{BA}$ como un vector dirigido desde *B*, punto final de la fuerza $\vec{F}$, hasta *A*, punto inicial de la misma, como se muestra en la figura 3.33(a). O sea:

$$\vec{r}_{BA} = 12\boldsymbol{i}\ [\text{m}]$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & -80 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 960\boldsymbol{j} + 720\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\vec{F} = \mathbf{60}\boldsymbol{j} - \mathbf{80}\boldsymbol{k}\ [\mathbf{N}] \quad \vec{M} = \mathbf{960}\boldsymbol{j} + \mathbf{720}\boldsymbol{k}\ [\mathbf{Nm}]$$

En el punto *B* se tiene una fuerza $\vec{F}$ y un par de momento $\vec{M}$, como se aprecia en la figura 3.33(b). Nótese que el momento $\vec{M}$ del par, por ser un vector libre, como ya se ha visto, tiende a producir el mismo efecto de rotación independientemente del punto donde se coloque, aunque por conveniencia se ubica en el punto *B*, junto con la fuerza $\vec{F}$, y al conjunto se le denomina sistema fuerza-par equivalente en *B*.

3.23 Sistema fuerza-par equivalente de varias fuerzas

Si se tienen varias fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ aplicadas respectivamente en los puntos A_1, A_2 y A_3 de un cuerpo rígido, siendo $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ los vectores de posición correspondientes, como se indica en la figura 3.34(a), se pueden convertir cada una de ellas en un sistema fuerza-par equivalente en un punto *O*, como se muestra en la figura 3.34(b), para lo cual se obtienen las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, además de los momentos respectivos, dados por:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

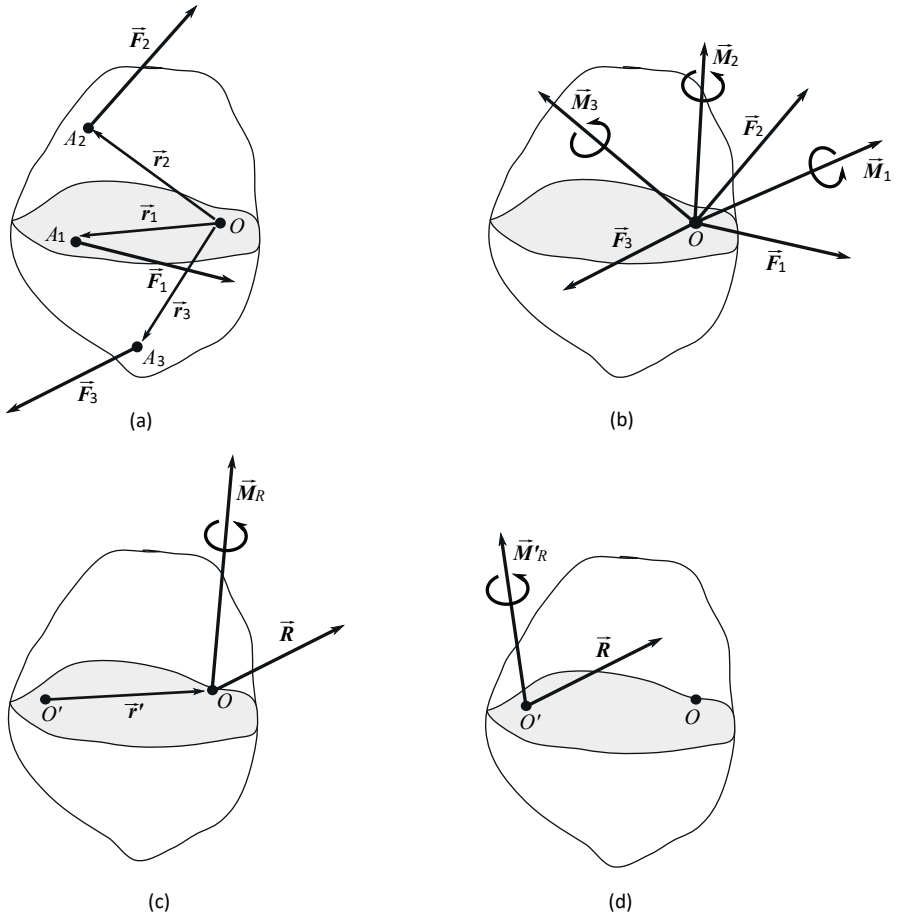


Figura 3.34

Al estar aplicadas las fuerzas en un mismo punto *O*, se pueden sumar para hallar una resultante, así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Se suman también los momentos:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

Finalmente, en el punto O se tiene un sistema fuerza-par equivalente dado por una fuerza $\vec{R}$ y un par de momento $\vec{M}_R$, como se indica en la figura 3.34(c), el cual produce el mismo efecto de rotación y de traslación que las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, aplicadas en sus respectivos puntos.

Se debe tener en cuenta que mientras que los momentos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ y $\vec{M}_3$, tomados de forma individual, son perpendiculares a sus respectivas fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, en general, el momento resultante $\vec{M}_R$ no es perpendicular a la fuerza resultante fuerza $\vec{R}$.

Después de que un sistema de fuerzas se ha reducido a un sistema fuerza-par equivalente, dado por una fuerza $\vec{R}$ y un par de momento $\vec{M}_R$, como se indica en la figura 3.34(c), se puede convertir en un nuevo sistema fuerza-par equivalente aplicado en un punto *O'*, como se aprecia en la figura 3.34(d), dado por la misma fuerza $\vec{R}$, la cual permanece igual y un par de momento $\vec{M}'_R$, así:

$$\vec{M}'_R = \vec{M}_R + \vec{r}' \times \vec{R} \tag{3.24}$$

Siendo $\vec{r}' = \vec{r}_{O'O}$ el vector desde el punto *O'*, posición del nuevo sistema fuerza-par equivalente, hasta el punto *O*, como se muestra en la figura 3.34(c).

3.23.1 Ejemplo 3.10

Una varilla de sección cuadrada *OABCD* es sometida a dos fuerzas y dos pares como se indica en la figura 3.35: *a*) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto *O*, *b*) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto *C* y *c*) convertir el sistema fuerza-par equivalente obtenido en el punto *O* en un nuevo sistema fuerza-par equivalente en el punto *C*. Comparar los resultados.

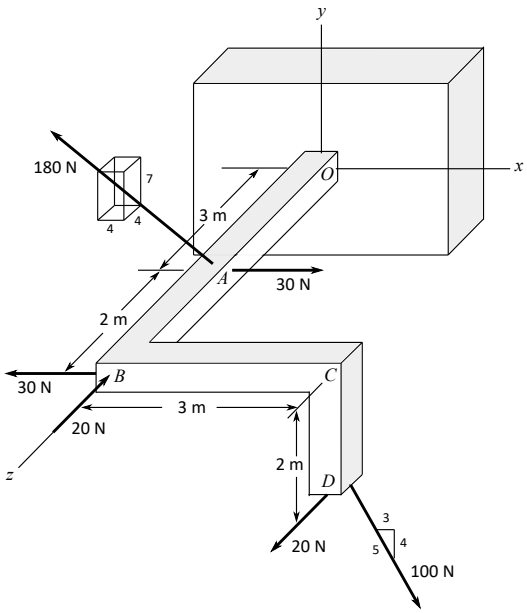


Figura 3.35

Solución (a)

Se designan cada una de las fuerzas y los pares dados, y se expresan en forma vectorial, así:

$\vec{F}_1$ = fuerza de 100 N $\qquad$ $\vec{F}_2$ = fuerza de 180 N

$\vec{M}_{p1}$ = momento del par de 30 N $\qquad$ $\vec{M}_{p2}$ = momento del par de 20 N

$$\vec{F}_1 = \vec{\lambda}_1 F_1 = \left(\frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right)(100\text{ N}) = 60\boldsymbol{i} - 80\boldsymbol{j}\text{ [N]}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{\lambda}_2 F_2 = \left(\frac{-4\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}}\right)(180\text{ N}) = -80\boldsymbol{i} + 140\boldsymbol{j} + 80\boldsymbol{k}\text{ [N]}$$

Los momentos de los pares de 30 N y 20 N se determinan de acuerdo con el procedimiento visto en el ejemplo 3.7, así:

$$\vec{M}_{p1} = \vec{r}_{p1} \times \vec{F}_{p1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & -2 \\ 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}\text{[Nm]} = -60\boldsymbol{j}\text{ [Nm]}$$

$$\vec{M}_{p2} = \vec{r}_{p2} \times \vec{F}_{p2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}\text{[Nm]} = -40\boldsymbol{i} - 60\boldsymbol{j}\text{ [Nm]}$$

Se convierten las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en dos sistemas fuerza-par equivalentes en el punto *O*, obteniendo las mismas dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ al adicionarle los respectivos momentos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$, como se muestra en la figura 3.36(a), dados por:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{OD} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}\text{ [m]} \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_{OA} = 3\boldsymbol{k}\text{ [m]}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 60 & -80 & 0 \end{bmatrix}\text{[Nm]} = 400\boldsymbol{i} + 300\boldsymbol{j} - 120\boldsymbol{k}\text{ [Nm]}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ -80 & 140 & 80 \end{bmatrix}\text{[Nm]} = -420\boldsymbol{i} - 240\boldsymbol{j}\text{ [Nm]}$$

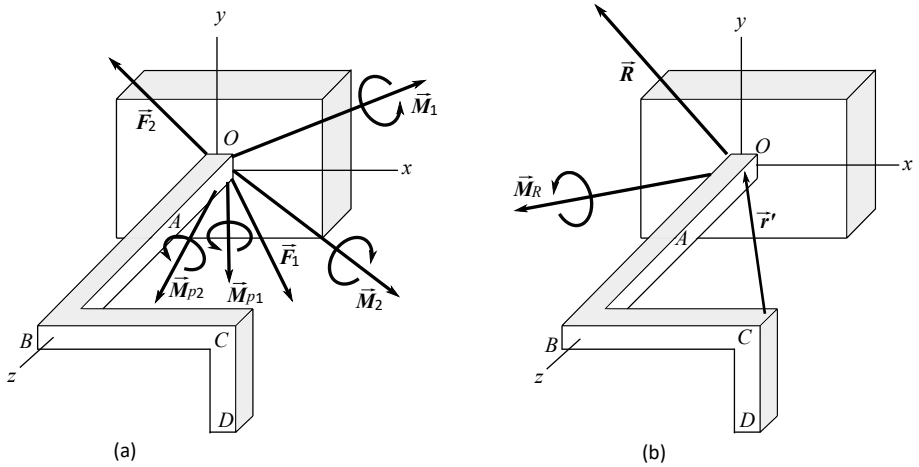


Figura 3.36

Se trasladan los pares de 30 N y 20 N, de momentos respectivos $\vec{M}_{p1}$ y $\vec{M}_{p2}$, hasta el punto *O* sin modificación alguna por tratarse de vectores libres, como se muestra en la figura 3.36(a).

Por tanto, en el punto *O* se encuentran ahora ubicados: dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con sus correspondientes momentos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$ como resultado de sus traslados y dos momentos $\vec{M}_{p1}$ y $\vec{M}_{p2}$, pertenecientes a los pares. Seguidamente se suman las fuerzas, por estar aplicadas en un mismo punto *O*, y también los momentos para hallar las resultantes, así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -20\boldsymbol{i} + 60\boldsymbol{j} + 80\boldsymbol{k}\ [\text{N}]$$
$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_{p1} + \vec{M}_{p2} = -60\boldsymbol{i} - 60\boldsymbol{j} - 120\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

En la figura 3.36(b) se muestra el resultado de la conversión, en donde se tiene un sistema fuerza-par equivalente, compuesto por una fuerza resultante $\vec{R}$ y un momento resultante $\vec{M}_R$, actuando en el punto *O*, cuyos valores son:

$$\vec{R} = \mathbf{-20i + 60j + 80k}\ [\mathbf{N}] \qquad \vec{M}_R = \mathbf{-60i - 60j - 120k}\ [\mathbf{Nm}]$$

Solución (b)

Siguiendo los pasos de acuerdo con la solución (a), en vez de tomar a *O*, como punto de destino, se trasladan las fuerzas y los pares hacia el punto *C*. En cuanto a las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, se obtienen las mismas fuerzas y con sus respectivos momentos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}'_2$, dados por:

$$\vec{F}_1 = 60\boldsymbol{i} - 80\boldsymbol{j}\ [\text{N}] \qquad \vec{F}_2 = -80\boldsymbol{i} + 140\boldsymbol{j} + 80\boldsymbol{k}\ [\text{N}]$$

$$\vec{r}\,'_1 = \vec{r}_{CD} = -2\boldsymbol{j}\ [\text{m}] \qquad \vec{r}\,'_2 = \vec{r}_{CA} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}\ [\text{m}]$$

$$\vec{M}'_1 = \vec{r}\,'_1 \times \vec{F}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 60 & -80 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 120\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\vec{M}'_2 = \vec{r}\,'_2 \times \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 0 & -2 \\ -80 & 140 & 80 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 280\boldsymbol{i} + 400\boldsymbol{j} - 420\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Por último, se hallan la fuerza resultante $\vec{R}$ y el momento resultante $\vec{M}'_R$ tomando los mismos momentos de los pares $\vec{M}_{p1}$ y $\vec{M}_{p2}$ ya calculados, así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -20\boldsymbol{i} + 60\boldsymbol{j} + 80\boldsymbol{k}\ [\text{N}]$$

$$\vec{M}'_R = \vec{M}'_1 + \vec{M}'_2 + \vec{M}_{p1} + \vec{M}_{p2} = 240\boldsymbol{i} + 280\boldsymbol{j} - 300\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

O sea, en el punto *C* se tiene la misma fuerza resultante $\vec{R}$ y el momento resultante $\vec{M}'_R$, dados por:

$$\vec{R} = \mathbf{-20\boldsymbol{i} + 60\boldsymbol{j} + 80\boldsymbol{k}\ [\text{N}]} \qquad \vec{M}'_R = \mathbf{240\boldsymbol{i} + 280\boldsymbol{j} - 300\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]}$$

Solución (c)

Una vez se obtiene un sistema fuerza-par en un punto determinado *O*, se puede convertir en un nuevo sistema fuerza-par en otro punto *C*, como se ilustra en la figura 3.36(b), teniendo en cuenta que la fuerza resultante $\vec{R}$ es siempre la misma, aunque el nuevo momento resultante $\vec{M}'_R$ se calcula de acuerdo con la relación 3.24, así:

$$\vec{M}'_R = \boldsymbol{M}_R + \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{R} \tag{1}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_{CO} = -3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k}\ [\text{m}] \qquad \boldsymbol{R} = \mathbf{-20\boldsymbol{i} + 60\boldsymbol{j} + 80\boldsymbol{k}\ [\text{N}]}$$

$$\vec{r}\,' \times \vec{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 0 & -5 \\ -20 & 60 & 80 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 300\boldsymbol{i} + 340\boldsymbol{j} - 180\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_{p1} + \vec{M}_{p2} = -60\boldsymbol{i} - 60\boldsymbol{j} - 120\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Al sustituir valores en la ecuación 1:

$$\vec{M}'_R = \mathbf{240\boldsymbol{i} + 280\boldsymbol{j} - 300\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]}$$

El nuevo sistema fuerza-par actuando en el punto *C* está dado por la resultante $\vec{R}$ y un par de momento $\vec{M}'_R$. Se observa que los resultados obtenidos mediante las soluciones (b) y (c) son iguales, como era de esperarse.

3.24 Conversiones de sistemas equivalentes de fuerzas

Los sistemas de fuerzas son reducidos a sistemas equivalentes simplificados para facilitar su estudio y poder analizar de forma sencilla las condiciones de cargas sobre un cuerpo rígido. Teniendo en cuenta las posibilidades de transformar un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido en un sistema equivalente abreviado, se pueden estudiar las siguientes formas de conversión:

1. *Sistema de fuerzas en el plano:* el cual se puede reducir a una fuerza única equivalente.
2. *Sistema de fuerzas paralelas, en el plano o en el espacio:* el cual se puede convertir también en una fuerza única equivalente.
3. *Sistema general de fuerzas en el espacio:* el cual para ser reducido es necesario convertirlo en una fuerza y un par que actúan en la misma dirección, denominado *torsor*.

3.25 Reducción de un sistema de fuerzas en el plano en una fuerza única equivalente

Sean $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ un sistema de fuerzas en el plano *xy* y sean $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ los correspondientes vectores de posición de los puntos de aplicación *A*, *B* y *C*, con respecto al punto *O*, como se indica en la figura 3.37(a). De acuerdo con lo visto en la sección 3.23, al convertir a un sistema fuerza-par aplicado en el punto *O*, se obtienen las tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, además de los respectivos momentos, dados por:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

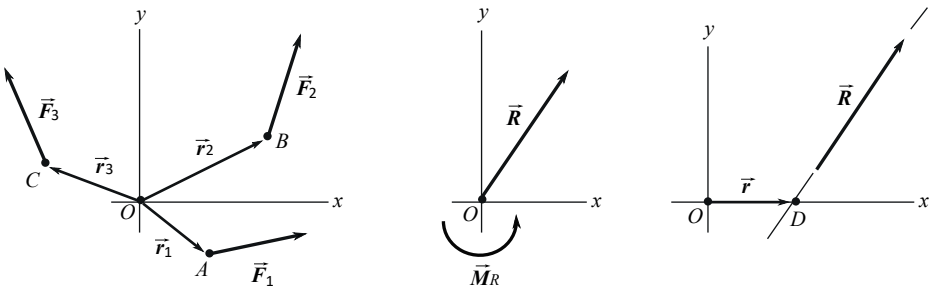


Figura 3.37

Entonces, por encontrarse aplicados en un mismo punto, se suman tanto las fuerzas como los momentos para hallar las resultantes, así:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \vec{\boldsymbol{F}}_3 \qquad \vec{\boldsymbol{M}}_R = \vec{\boldsymbol{M}}_1 + \vec{\boldsymbol{M}}_2 + \vec{\boldsymbol{M}}_3$$

Por lo tanto, se obtiene en el punto *O*, como se ilustra en la figura 3.37(b), una fuerza resultante $\vec{\boldsymbol{R}}$ en el plano *xy* y un momento resultante $\vec{\boldsymbol{M}}_R$ con componente solamente en el eje *z,* los cuales son respectivamente perpendiculares, expresados así:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = R_x\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} \qquad \vec{\boldsymbol{M}}_R = M_z\boldsymbol{k}$$

Por tales razones, el anterior sistema puede ser convertido en una sola fuerza equivalente $\vec{\boldsymbol{R}}$, lo cual se consigue al mover a $\vec{\boldsymbol{R}}$ de tal manera que su línea de acción corte al eje *x* en el punto *D*, como se aprecia en la figura 3.37(c), siendo $\vec{\boldsymbol{r}} = x\boldsymbol{i}$, produciendo el momento $\vec{\boldsymbol{M}}'_R$, dado por:

$$\vec{\boldsymbol{M}}'_R = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & 0 & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{bmatrix} = xR_y\boldsymbol{k}$$

Al igualar $\vec{\boldsymbol{M}}_R$ y $\vec{\boldsymbol{M}}'_R$:

$$xR_y = M_z \qquad x = M_z/R_y$$

En donde M_z constituye la magnitud del momento resultante $\vec{\boldsymbol{M}}_R$ y R_y la componente en el eje *y* de la fuerza resultante $\vec{\boldsymbol{R}}$.

3.25.1 Ejemplo 3.11

Para la armadura y cargas mostradas en la figura 3.38, encontrar: *a*) un sistema fuerza-par equivalente en el punto *O* y *b*) una fuerza única equivalente y la intersección de su línea de acción con el eje *x*.

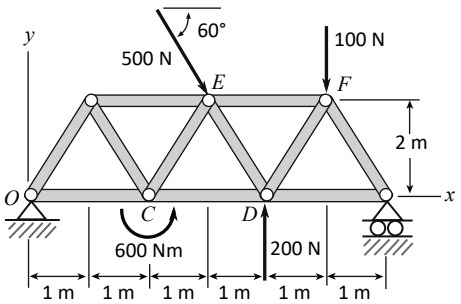


Figura 3.38

Solución (a)

Se designan cada una de las fuerzas y los pares, así:

$\vec{F}_1$ = fuerza de 100 N $\quad$ $\vec{F}_2$ = fuerza de 200 N $\quad$ $\vec{F}_3$ = fuerza de 500 N

$\vec{M}_p$ = momento del par de 600 Nm

Se convierte cada fuerza en un sistema fuerza-par equivalente en el punto *O*, para obtener tres fuerzas y sus respectivos momentos, dados por:

$$\vec{F}_1 = -100\boldsymbol{j}\ [\text{N}] \quad \vec{F}_2 = 200\boldsymbol{j}\ [\text{N}] \quad \vec{F}_3 = 250\boldsymbol{i} - 433\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{OF} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}\ [\text{m}] \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{OD} = 4\boldsymbol{i}\ [\text{m}] \quad \vec{r}_3 = \vec{r}_{OE} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}\ [\text{m}]$$

$$\vec{M}_1 = (5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \times (-100\boldsymbol{j})\ [\text{Nm}] = -500\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\vec{M}_2 = (4\boldsymbol{i}) \times (200\boldsymbol{j})\ [\text{Nm}] = 800\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\vec{M}_3 = \vec{r}_{AE} \times \vec{F}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 250 & -433 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -1\,799\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Ahora, por estar aplicados en el mismo punto *O*, se suman las fuerzas para hallar una resultante $\vec{R}$ y los momentos para encontrar un momento resultante $\vec{M}_R$, al cual se le adiciona el momento del par de 600 Nm, que por ser un vector libre se traslada al punto *O* sin modificación alguna, para conseguir en dicho punto un sistema fuerza-par equivalente, como se indica en la figura 3.39(a), así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -100\boldsymbol{j} + 200\boldsymbol{j} + 250\boldsymbol{i} - 433\boldsymbol{j}\ [\text{N}] = 250\boldsymbol{i} - 333\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_p = -500\boldsymbol{k} + 800\boldsymbol{k} - 1\,799\boldsymbol{k} + 600\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}] \quad \boldsymbol{M}_R = -899\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

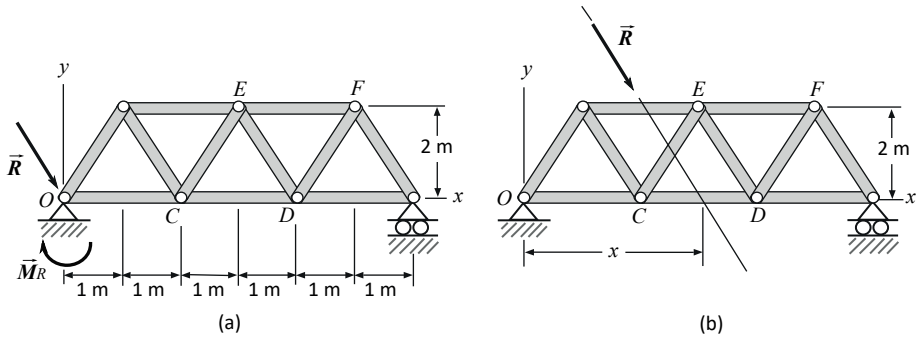


Figura 3.39

Solución (b)

Se convierte el sistema fuerza-par equivalente dado en el punto *O*, por la fuerza resultante $\vec{R}$ y el momento resultante $\vec{M}_R$, como se indica en la figura 3.39(a), en una fuerza única equivalente $\vec{R}$, como se muestra en la figura 3.39(b).

Se traslada la fuerza $\vec{R}$ de tal manera que se produzca un momento $\vec{M}'_R$ igual al momento $\vec{M}_R$, lo cual garantiza que los dos sistemas sean equivalentes.

$$\vec{M}'_R = \vec{r} \times \vec{R} \qquad r = x\boldsymbol{i}$$

$$\vec{M}'_R = \vec{r} \times \vec{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & 0 & 0 \\ 250 & -333 & 0 \end{bmatrix} [\text{N}] = -333x\boldsymbol{k}\,[\text{N}]$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}'_R \quad -899k\,[\text{Nm}] = -333x\boldsymbol{k}\,[\text{N}] \qquad \boldsymbol{x = \frac{899}{333}[\text{m}] = 2.69\,[\text{m}]}$$

Las dos situaciones mostradas en las figuras 3.39(a) y 3.39(b) son equivalentes.

3.26 Conversión de un sistema de fuerzas paralelas en una fuerza única equivalente

Considere un sistema de fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, paralelas al eje y, aplicadas respectivamente en los puntos de coordenadas $A_1\,(x_1, z_1)$, $A_2\,(x_2, z_2)$ y $A_3\,(x_3, z_3)$, como se muestra en la figura 3.40(a), por tanto los vectores de posición de los puntos de aplicación $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ y las fuerzas correspondientes se expresan así:

$$\vec{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + z_1\boldsymbol{k} \qquad \vec{F}_1 = -F_1\boldsymbol{j}$$
$$\vec{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{k} \qquad \vec{F}_2 = -F_2\boldsymbol{j}$$
$$\vec{r}_3 = x_3\boldsymbol{i} + z_3\boldsymbol{k} \qquad \vec{F}_3 = -F_3\boldsymbol{j}$$

Al trasladar las fuerzas al punto *O* se le adiciona a cada una su respectivo momento, dados por:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = z_1F_1\boldsymbol{i} - x_1F_1\boldsymbol{k}$$
$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = z_2F_2\boldsymbol{i} - x_2F_2\boldsymbol{k}$$
$$\vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = z_3F_3\boldsymbol{i} - x_3F_3\boldsymbol{k}$$

En el punto *O* se tiene una fuerza resultante $\vec{R}$ y un momento resultante $\vec{M}_R$, como se aprecia en la figura 3.40(b), expresados así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -(F_1 + F_2 + F_3)\boldsymbol{j} = -R\boldsymbol{j}$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = (z_1F_1 + z_2F_2 + z_3F_3)\boldsymbol{i} - (x_1F_1 + xF_2 + x_3F_3)\boldsymbol{k}$$

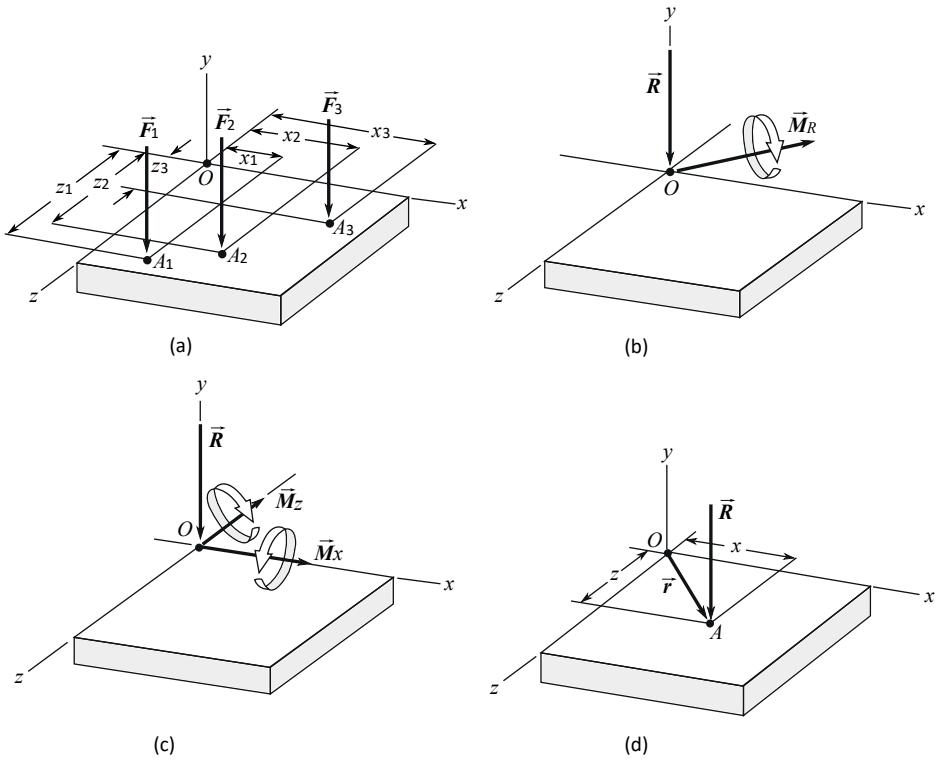


Figura 3.40

Al expresar a $\vec{\boldsymbol{M}}_R$ en forma de componentes, como se indica en la figura 3.40(c), se tiene:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_R = M_x\boldsymbol{i} - M_z\boldsymbol{k}$$

$$M_x = (z_1F_1 + z_2F_2 + z_3F_3) \quad M_z = (x_1F_1 + xF_2 + x_3F_3)$$

El vector del momento resultante $\vec{\boldsymbol{M}}_R$ tiene solo componentes en los ejes x y z, o sea, se encuentra contenido en el plano xz, como se muestra en la figura 3.40(c); debido a que la fuerza resultante $\vec{\boldsymbol{R}}$ tiene únicamente componente en el eje y, entonces son perpendiculares entre sí, y por lo tanto se pueden convertir en una fuerza única equivalente, lo cual se consigue al trasladar a $\vec{\boldsymbol{R}}$ en forma paralela, como se indica en la figura 3.40(d), generándose el momento $\vec{\boldsymbol{M}}'_R = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{R}}$, siendo $\vec{\boldsymbol{r}} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$, así:

$$\vec{\boldsymbol{M}}'_R = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & 0 & z \\ 0 & -R & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = zR\boldsymbol{i} - xR\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Igualando $\vec{M}_R$ y $\vec{M}'_R$ componente a componente se calculan los valores x y z correspondientes a $\vec{r}$, así:

$$z = M_x/R \qquad x = M_z/R$$

Y al reemplazar valores se obtiene:

$$x = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3}{F_1 + F_2 + F_3} \qquad z = \frac{z_1F_1 + z_2F_2 + z_3F_3}{F_1 + F_2 + F_3} \tag{3.25}$$

Las relaciones 3.25 pueden ser utilizadas directamente para obtener, de forma práctica y rápida, una solución escalar, como se verá en el siguiente ejemplo.

3.26.1 Ejemplo 3.12

Una placa de 12 × 20 m es sometida a cuatro fuerzas paralelas verticales, como se indica en la figura 3.41. Hallar la fuerza equivalente y el punto de aplicación correspondiente.

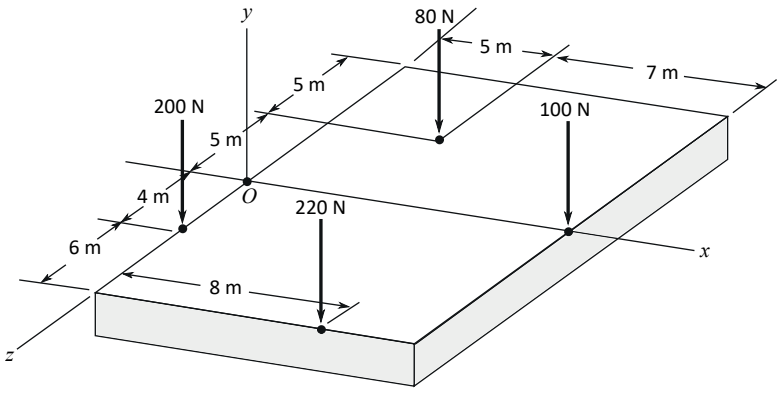


Figura 3.41

Solución vectorial

Se designan las fuerzas así:

$\vec{F}_1$ = fuerza de 200 N $\qquad$ $\vec{F}_2$ = fuerza de 220 N

$\vec{F}_3$ = fuerza de 100 N $\qquad$ $\vec{F}_4$ = fuerza de 80 N

Se expresa cada una de las fuerzas y sus correspondientes vectores de posición de los puntos de aplicación con respecto al origen *O*, en forma vectorial, así:

$$\vec{r}_1 = 0\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}\ [\text{m}] \qquad \vec{F}_1 = -200\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$
$$\vec{r}_2 = 8\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{k}\ [\text{m}] \qquad \vec{F}_2 = -220\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$
$$\vec{r}_3 = 12\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{k}\ [\text{m}] \qquad \vec{F}_3 = -100\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$
$$\vec{r}_4 = 5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k}\ [\text{m}] \qquad \vec{F}_4 = -80\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$

Se realiza la sumatoria de fuerzas para obtener la resultante, como sigue:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = -200\boldsymbol{j}\ [\text{N}] - 220\boldsymbol{j}\ [\text{N}] - 100\boldsymbol{j}\ [\text{N}] - 80\boldsymbol{j}\ [\text{N}] = -600\boldsymbol{j}\ [\text{N}]$$

Los momentos de cada una de las fuerzas y el momento resultante, relativos al punto *O*, están dados por:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (0\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}) \times (-200\boldsymbol{j})\ [\text{Nm}] = 800\boldsymbol{i}\ [\text{Nm}]$$
$$\vec{\boldsymbol{M}}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (8\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{k}) \times (-220\boldsymbol{j})\ [\text{Nm}] = 2\,200\boldsymbol{i} - 1\,760\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$
$$\vec{\boldsymbol{M}}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = (12\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{k}) \times (-100\boldsymbol{j})\ [\text{Nm}] = -1\,200\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$
$$\vec{\boldsymbol{M}}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = (5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k}) \times (-80\boldsymbol{j})\ [\text{Nm}] = -400\boldsymbol{i} - 400\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$
$$\vec{\boldsymbol{M}}_R = \vec{\boldsymbol{M}}_1 + \vec{\boldsymbol{M}}_2 + \vec{\boldsymbol{M}}_3 + \vec{\boldsymbol{M}}_4 = 2\,600\,\boldsymbol{i} - 3\,360\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Tanto $\vec{\boldsymbol{R}}$ como $\vec{\boldsymbol{M}}_R$ son mostrados en la figura 3.42(a). Ahora, se traslada la resultante $\vec{\boldsymbol{R}}$ al punto de coordenadas (*x, z*), con vector de posición $\vec{r} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$, como se indica en la figura 3.42(b), por lo cual se genera el correspondiente momento $\vec{\boldsymbol{M}}'_R$, expresado así:

$$\vec{\boldsymbol{M}}'_R = \vec{r} \times \vec{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & 0 & z \\ 0 & -600 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 600z\boldsymbol{i} - 600x\boldsymbol{k}\ [\text{Nm}]$$

Igualando $\vec{\boldsymbol{M}}_R$ y $\vec{\boldsymbol{M}}'_R$ componente a componente hallamos los valores *x* y *z* correspondientes a $\vec{r}$, así:

$$600z = 2\,600 \qquad z = \frac{2\,600}{600} = 4.33\ \text{m}$$
$$600x = 3\,360 \qquad x = \frac{3\,360}{600} = 5.6\ \text{m}$$

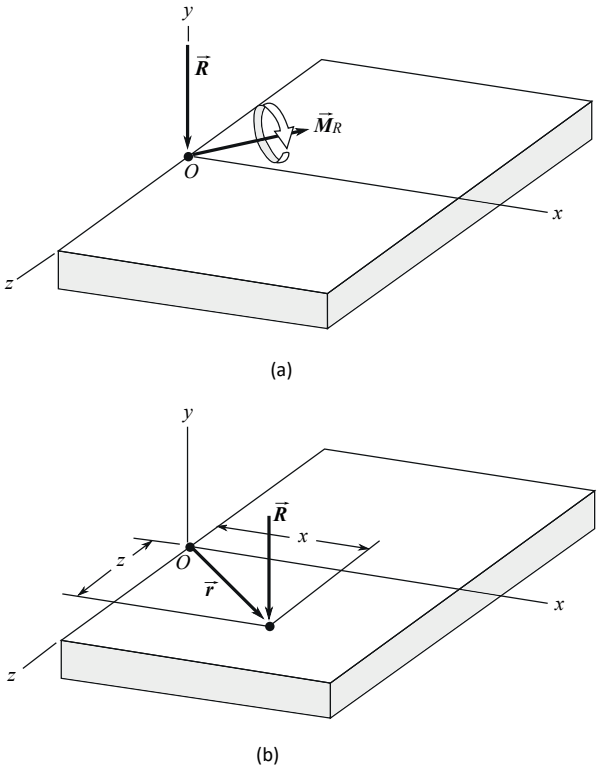


Figura 3.42

Solución escalar

Se aplican las relaciones 3.25 dadas por:

$$x = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 + x_4F_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} \qquad z = \frac{z_1F_1 + z_2F_2 + z_3F_3 + z_4F_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}$$

$$F_1 = 200\ \text{N} \qquad x_1 = 0 \qquad z_1 = 4\ \text{m}$$

$$F_2 = 220\ \text{N} \qquad x_2 = 8\ \text{m} \qquad z_2 = 10\ \text{m}$$

$$F_3 = 100\ \text{N} \qquad x_3 = 12\ \text{m} \qquad z_3 = 0$$

$$F_4 = 80\ \text{N} \qquad x_4 = 5\ \text{m} \qquad z_4 = -5\ \text{m}$$

$$x = \frac{(0)(200\ \text{N}) + (8\ \text{m})(220\ \text{N}) + (12\ \text{m})(100\ \text{N}) + (5\ \text{m})(80\ \text{N})}{200\ \text{N} + 220\ \text{N} + 100\ \text{N} + 80\ \text{N}} = 5.6\ \text{m}$$

$$z = \frac{(4\ \text{m})(200\ \text{N}) + (10\ \text{m})(220\ \text{N}) + (0)(100\ \text{N}) + (-5\ \text{m})(80\ \text{N})}{200\ \text{N} + 220\ \text{N} + 100\ \text{N} + 80\ \text{N}} = 4.33\ \text{m}$$

3.27 Reducción de un sistema de fuerzas en el espacio en un torsor

Se ha visto en la sección 3.23 que al convertir varias fuerzas en un sistema fuerza-par equivalente, en un punto determinado *O*, la fuerza resultante $\vec{R}$ y el momento resultante $\vec{M}_R$, en general, no son perpendiculares entre sí, por tanto, no siempre pueden ser convertidos en una fuerza única equivalente, como en los casos tratados en las secciones 3.25 y 3.26.

El sistema general en donde la fuerza resultante $\vec{R}$ y el momento resultante $\vec{M}_R$ no sean perpendiculares entre sí se puede convertir en lo que se denomina un *torsor*. El procedimiento de reducción a un torsor consiste en que una vez transformado el sistema de fuerzas en una fuerza resultante $\vec{R}$ y en un momento resultante $\vec{M}_R$ en un punto de referencia *O*, como se indica en la figura 3.43(a), se descompone a $\vec{M}_R$ en dos componentes: una en la dirección de $\vec{R}$ denominada $\vec{M}_p$ o componente paralela y la otra perpendicular llamada $\vec{M}_n$ o componente normal, como se indica en la figura 3.43(b).

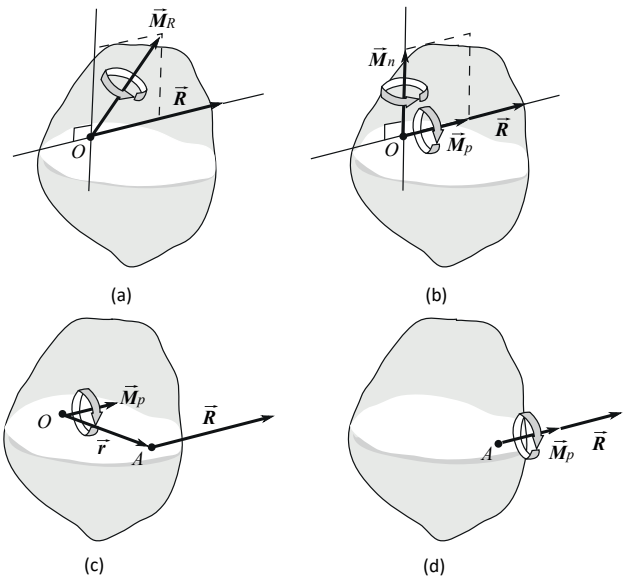


Figura 3.43

Entonces se traslada a $\vec{R}$ desde el punto *O* hacia el punto *A*, en un plano perpendicular a $\vec{M}_n$, de tal manera que se genere un momento dado por $\vec{M}_{n'} = \vec{r} \times \vec{R}$ e igual a $\vec{M}_n$, el cual se va a eliminar, tal como aparece en la figura 3.43(c). Una vez ubicado $\vec{R}$ en el punto *A* se puede trasladar la componente $\vec{M}_p$ también al punto *A* por ser un vector libre, y al conjunto momento del par $\vec{M}_p$ y fuerza $\vec{R}$ es a lo que se denomina torsor, el cual se muestra en la figura 3.43(d).

3.28 Consideraciones acerca de los sistemas equivalentes de fuerzas

En mecánica un cuerpo rígido está definido como aquel que no se deforma al ser sometido a fuerzas externas. Asimismo, las fuerzas externas representan la acción que ejercen otros cuerpos o elementos a su alrededor.

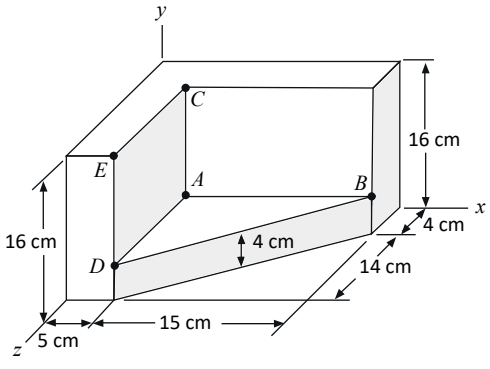
Por otro lado, las fuerzas internas son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman el cuerpo rígido. Si se trata de un cuerpo compuesto estructuralmente de varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se consideran fuerzas internas. Tal es el caso de las barras o elementos de unión que comprenden una armadura. Las fuerzas de interacción entre dichas barras son fuerzas internas.

Es importante tener en cuenta que los sistemas equivalentes son transformaciones de los sistemas originales de fuerzas y, como tal, son simplificaciones orientadas hacia el hecho de no alterar el equilibrio de un cuerpo rígido, lo cual quiere decir que solo se están considerando los efectos externos generados sobre dicho cuerpo, mas no las acciones internas. En realidad, cualquier cambio de posición de una fuerza externa en un cuerpo, aunque no altere las condiciones de equilibrio, puede afectar notablemente la distribución de las fuerzas internas, lo cual debe ser tenido en cuenta al trabajar con sistemas equivalentes de fuerzas.

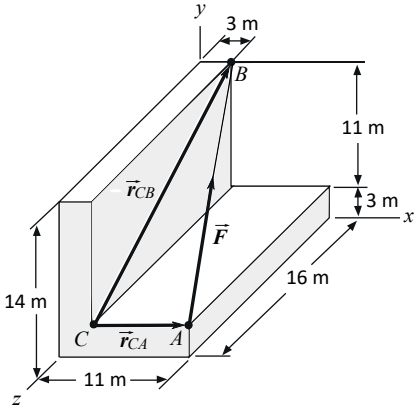
3.29 Problemas propuestos

Problema 3.1. Teniendo en cuenta los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* del sólido mostrado en la correspondiente figura, efectuar los siguientes productos vectoriales $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BE}$ y hallar el área de cada paralelogramo.

Problema 3.2. Una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 210 N pasa por los puntos *A* y *B* como se indica en la figura. Hallar el momento de $\vec{F}$ con respecto al punto *C*: *a*) utilizando el vector de posición $\vec{r}_{CA}$ y *b*) tomando el vector de posición $\vec{r}_{CB}$. Comparar los resultados.

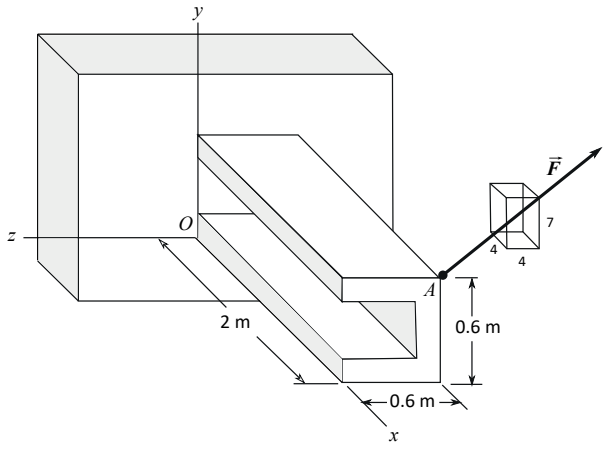


Problema 3.1



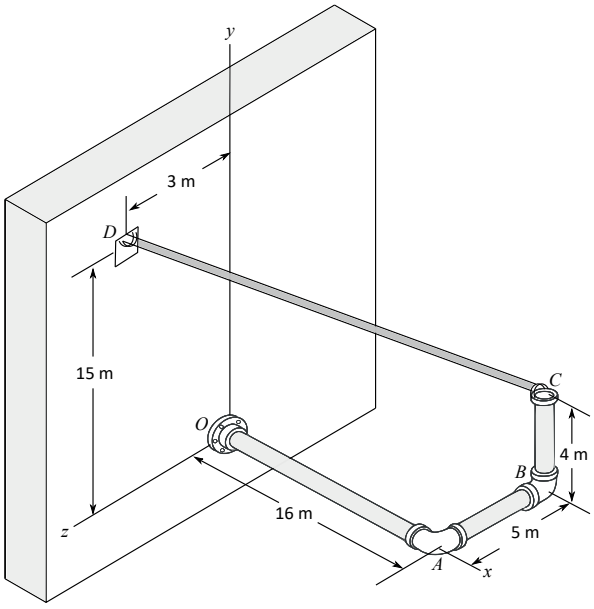
Problema 3.2

Problema 3.3. Una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 180 N es aplicada en el punto *A* de una viga, como se indica en la figura. Hallar el momento de la fuerza con respecto al punto *O*.



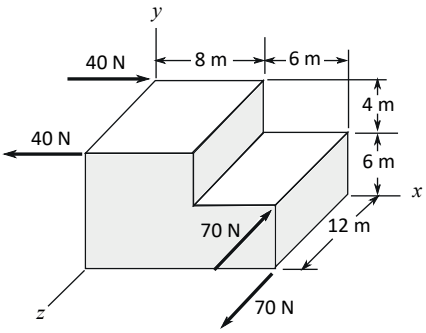
Problema 3.3

Problema 3.4. Una tubería *OABC*, empotrada en el punto *O*, es sostenida al aplicarle una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 210 N en el punto *C*, mediante una cadena *CD*, como se indica en la figura. Hallar: *a*) el momento $\vec{M}_O$ de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al punto *O* y *b*) el momento M_{OB} de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al eje que pasa por los puntos *O* y *B*.

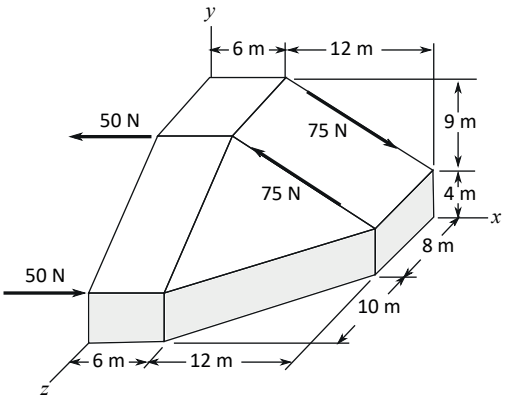


Problema 3.4

Problemas 3.5 y 3.6. En relación con los cuerpos mostrados, hallar el par equivalente a los dos pares dados.

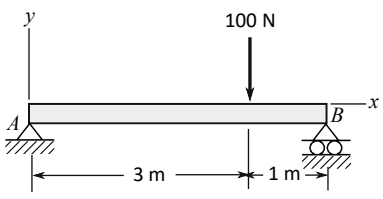


Problema 3.5

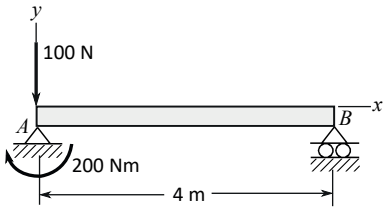


Problema 3.6

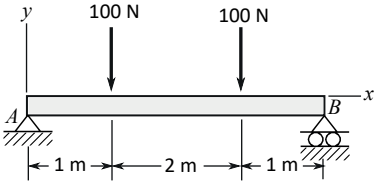
Problema 3.7. Teniendo en cuenta la viga *AB* y las cargas mostradas: *a*) convertir la fuerza de 100 N en un sistema fuerza-par equivalente en el punto *A*, *b*) reemplazar el sistema fuerza-par equivalente dado en el punto *A* por una sola fuerza equivalente y hallar la distancia sobre el eje *x* que lo separa del punto *A*, *c*) reemplazar las dos fuerzas de 100 N por una sola fuerza equivalente y hallar la distancia sobre el eje *x* que lo separa del punto *A* y *d*) reemplazar las fuerzas de 100 N y 120 N por una sola fuerza equivalente y encontrar la distancia sobre el eje *x* que lo separa del punto *A*.



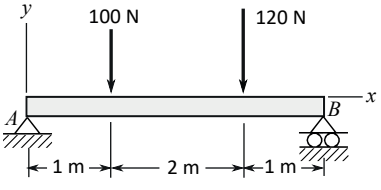
(a)



(b)



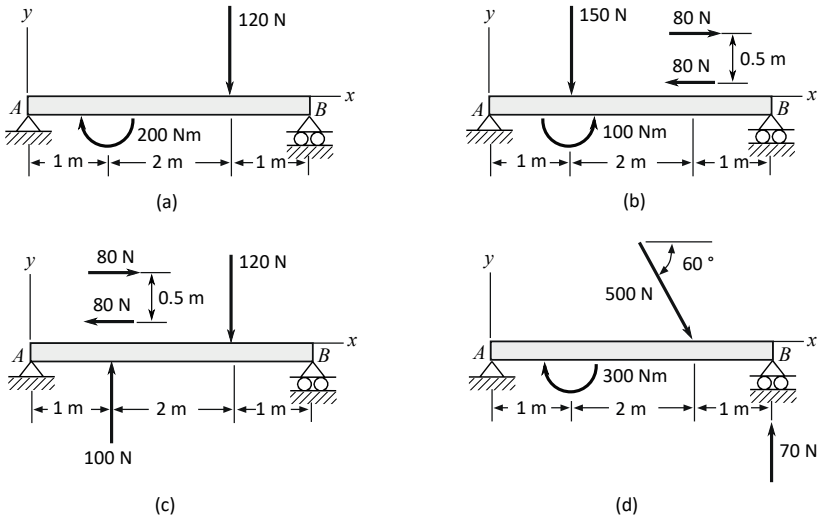
(c)



(d)

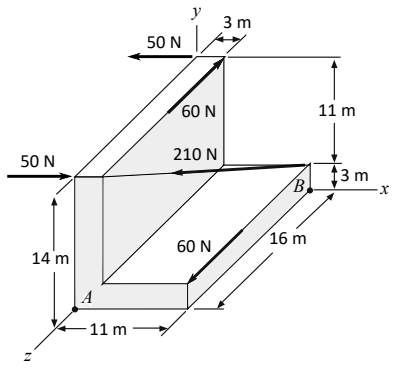
Problema 3.7

Problema 3.8. De acuerdo con la viga y las cargas dadas: *a*) convertir la fuerza y el par dados por un sistema fuerza-par equivalente en el punto *A*, *b*) reemplazar la fuerza y los dos pares dados por una sola fuerza equivalente y hallar la distancia sobre el eje *x* que lo separa del punto *A*, *c*) reemplazar las dos fuerzas y el par dados por una sola fuerza equivalente y hallar la distancia sobre el eje *x* que lo separa del punto *A* y *d*) reemplazar las dos fuerzas y el par dados por una sola fuerza equivalente y encontrar la distancia sobre el eje *x* que lo separa del punto *A*.

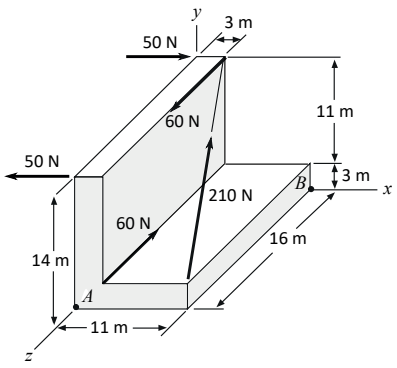


Problema 3.8

Problemas 3.9 y 3.10. El cuerpo mostrado está sometido a una fuerza y dos pares como se indica en la figura: *a*) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto *A*, *b*) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto *B* y *c*) convertir el sistema fuerza-par equivalente obtenido en el punto *A* en un nuevo sistema fuerza-par equivalente en el punto *B*. Comparar los resultados.

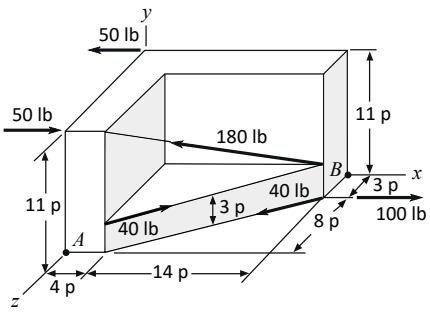


Problema 3.9

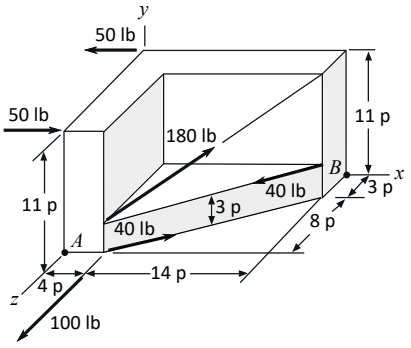


Problema 3.10

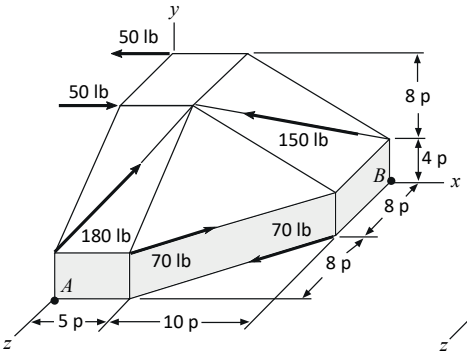
Problemas 3.11, 3.12, 3.13 y 3.14. El cuerpo mostrado está sometido a dos fuerzas y dos pares como se indican en la figura: *a*) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto *A*, *b*) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto *B* y *c*) convertir el sistema fuerza-par equivalente obtenido en el punto *A* en un nuevo sistema fuerza-par equivalente en el punto *B*. Comparar los resultados.



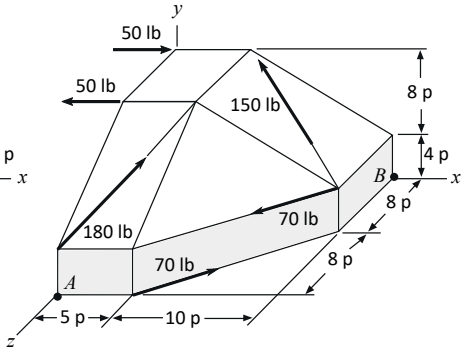
Problema 3.11



Problema 3.12

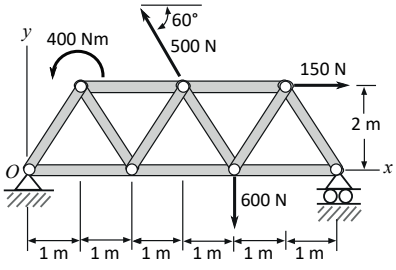


Problema 3.13

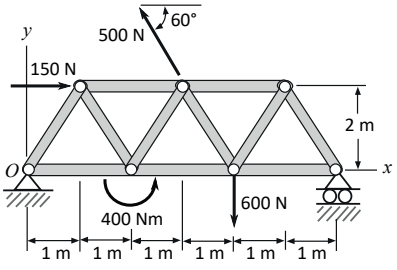


Problema 3.14

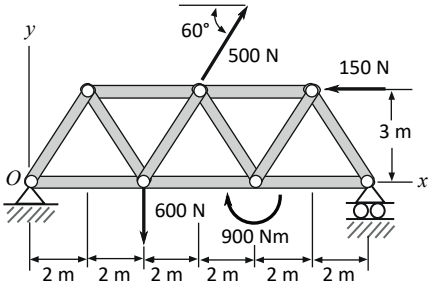
Problemas 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18. Para la armadura y las cargas mostradas, encontrar: *a*) un sistema fuerza-par equivalente en el punto *O* y *b*) una fuerza única equivalente y la intersección de su línea de acción con el eje *x*. Dibuje los respectivos diagramas.



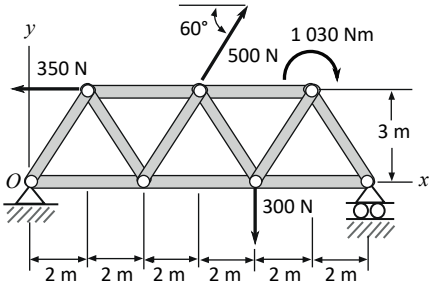
Problema 3.15



Problema 3.16

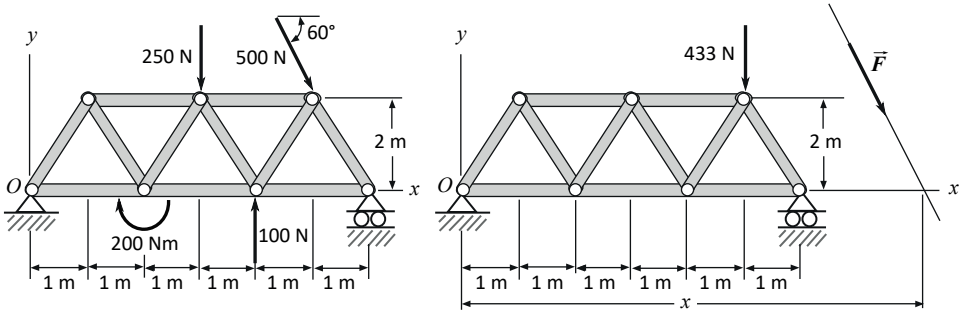


Problema 3.17

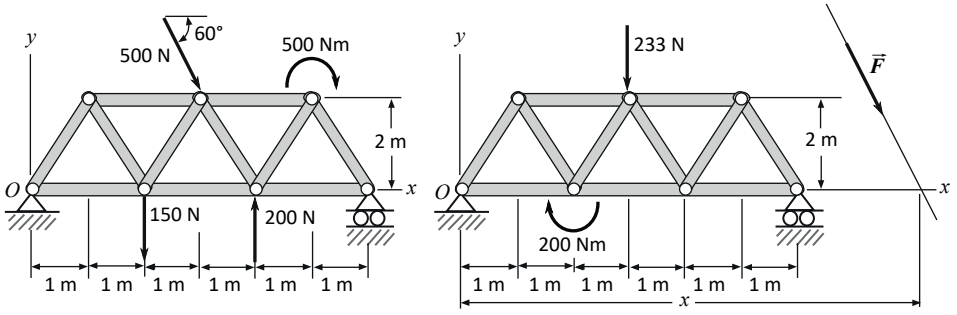


Problema 3.18

Problemas 3.19 y 3.20. Encontrar la fuerza $\vec{F}$ y el valor x correspondiente a la intersección de su línea de acción con el eje x, para que los dos sistemas sean equivalentes.



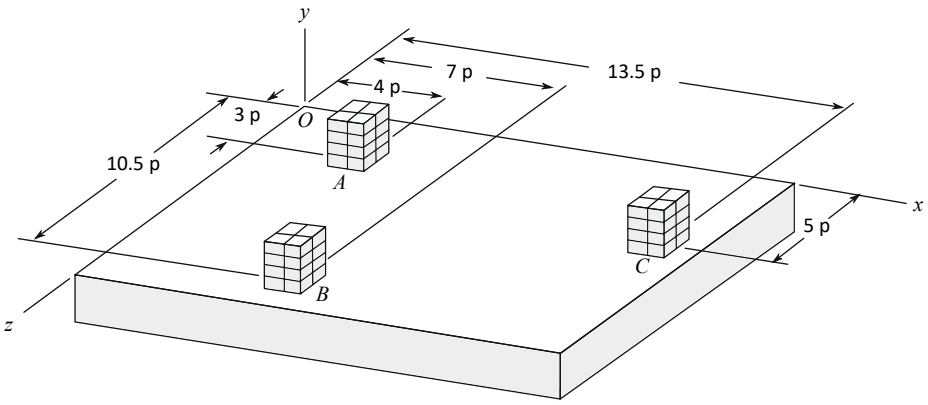
Problema 3.19



Problema 3.20

Problema 3.21. Sobre una balsa de 15 × 12 p son colocados tres paquetes *A*, *B* y *C* de pesos respectivos 50 lb, 60 lb y 40 lb en las posiciones indicadas en la figura. Hallar la magnitud y el punto de aplicación del peso equivalente a los tres pesos dados.

Problema 3.22. Sobre una balsa de 15 × 12 p son colocados tres paquetes *A*, *B* y *C* de pesos respectivos 50 lb, 60 lb y 40 lb en las posiciones indicadas en la figura. Si se pone en la balsa un cuarto paquete *D*, de peso 70 lb, hallar su posición para que el peso equivalente se encuentre localizado en el centro de la balsa.



Problemas 3.21 y 3.22

Equilibrio de cuerpos rígidos

4

Objetivos del capítulo

— Estudiar el equilibrio de cuerpos rígidos en el plano.
— Analizar el estado de equilibrio de un cuerpo rígido bajo la acción de dos y tres fuerzas.
— Identificar los tipos de apoyos y conexiones relacionados con un cuerpo rígido y establecer sus fuerzas equivalentes.
— Definir las condiciones de indeterminación estática de un cuerpo rígido.

4.1 Introducción

El estudio del equilibrio de cuerpos rígidos constituye una herramienta básica para calcular fuerzas desconocidas en estructuras o máquinas, sometidas a sistemas generales de cargas. Desde el punto de vista de la estática, su análisis se limita al empleo de tres ecuaciones para el caso de un cuerpo rígido en el plano y de seis cuando se considera en el espacio, para los cuales es posible la solución de un número igual de incógnitas.

El objeto principal de este capítulo es estudiar las condiciones requeridas para el equilibrio de un cuerpo rígido en el plano, con base en las fuerzas externas que actúan sobre él, constituidas por las fuerzas aplicadas y las reacciones en los apoyos.

4.2 Equilibrio de un cuerpo rígido

Considere un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas en el plano, dadas por $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, aplicadas respectivamente en los puntos A_1, A_2 y A_3 como se muestra en la figura 4.1.

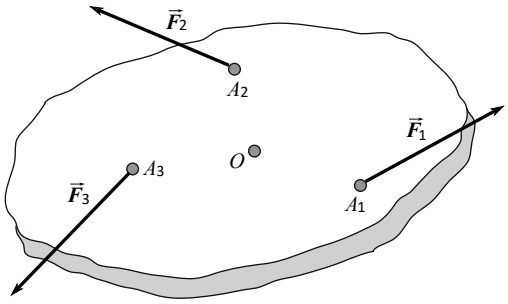


Figura 4.1

Se ha visto con base en la primera ley de Newton que si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a cero, la partícula se encuentra en equilibrio, lo cual se expresa así:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \tag{4.1}$$

La ecuación anterior, aunque es suficiente para definir el equilibrio de una partícula, puesto que esta solo puede ser sometida a movimiento de traslación, lo cual requiere que las fuerzas se encuentren aplicadas en un solo punto, o en la partícula misma, no puede garantizar lo mismo para el caso de un cuerpo rígido, como se aprecia en la figura 4.1, porque al estar las fuerzas actuando en puntos diferentes, puede experimentar no solamente movimiento de traslación, sino también de rotación, causados por los momentos de las fuerzas.

Es necesario, para determinar el equilibrio de un cuerpo rígido, además de la condición anterior, el que la sumatoria de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto de referencia *O* sea igual a cero, o sea:

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0 \tag{4.2}$$

Al expresar las fuerzas y los momentos, en forma de componentes rectangulares según los ejes *x*, *y* y *z*, de las relaciones 4.1 y 4.2, se desprenden las siguientes ecuaciones para el análisis de equilibrio de un cuerpo rígido, en tres dimensiones:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \tag{4.3a}$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \tag{4.3b}$$

Resultando en total seis ecuaciones para resolver seis incógnitas. Por otro lado, si el cuerpo rígido se considera en el plano *xy*, se cuenta con las siguientes tres ecuaciones, lo cual da lugar a resolver tres incógnitas:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \tag{4.4}$$

4.3 Equilibrio bajo la acción de dos y de tres fuerzas

Al analizar el caso de un cuerpo rígido en equilibrio, bajo la acción de solo dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, que actúan respectivamente en los puntos A_1 y A_2, como se indica en la figura 4.2(a), se observa que, por estar sobre la misma línea de acción, el momento de $\vec{F}_1$ con respecto al punto A_2 es igual a cero, así como el momento de $\vec{F}_2$ con respecto al punto A_1 también es igual a cero y por tanto se cumple la condición $\sum \vec{M} = 0$.

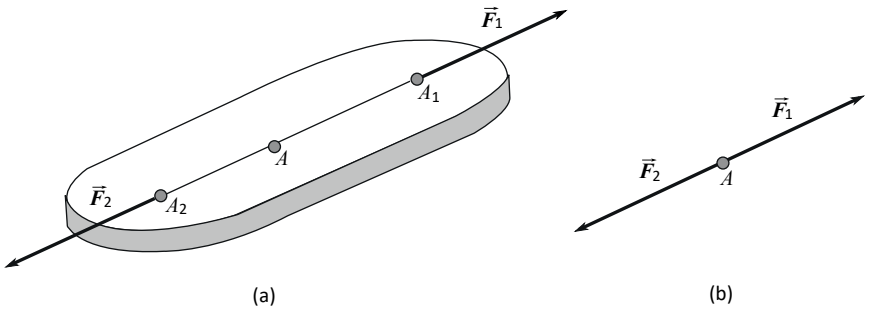


Figura 4.2

Al aplicar el principio de transmisibilidad, visto en la sección 3.10, y trasladar las fuerzas a un punto común *A*, como se aprecia en la figura 4.2(b), la situación se reduce al caso de una partícula *A* sometida a dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$; por lo tanto, teniendo en cuenta lo contemplado en la sección 2.12 y para que se cumpla la condición de equilibrio $\sum \vec{F} = 0$, se requiere que tengan la misma magnitud y sentidos contrarios.

Conforme al análisis anterior, se puede enunciar lo siguiente: *si un cuerpo rígido sometido a dos fuerzas se encuentra en equilibrio, las dos fuerzas tendrán la misma línea de acción, la misma magnitud y sentidos contrarios.*

Para el caso de un cuerpo bajo la acción de tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ no paralelas contenidas en el mismo plano, como se indica en la figura 4.3(a), las líneas de acción de dos de ellas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, se cortarán en un punto *A*, por lo tanto, los respectivos momentos con respecto al punto *A* serán nulos.

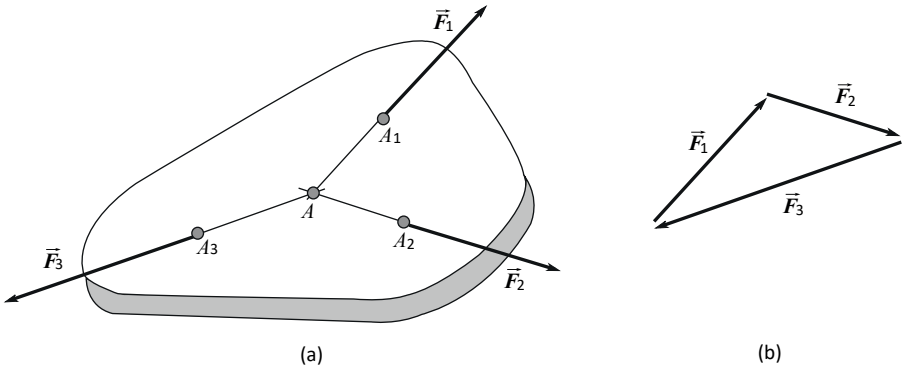


Figura 4.3

A la vez, si la línea de acción de la fuerza $\vec{F}_3$ se extiende hasta que corte el punto A, entonces el momento de $\vec{F}_3$ con respecto al punto A será igual a cero y se cumple la condición $\sum \vec{M} = 0$.

Por el principio de transmisibilidad, las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ se pueden trasladar hasta el punto A sin afectar el equilibrio del cuerpo, por lo que la condición se reduce a la de una partícula A en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas, y según lo expresado en la sección 2.12, las tres fuerzas formarán un triángulo cerrado, como se indica en la figura 4.3(b).

Entonces, la declaración es la siguiente: *si un cuerpo rígido sometido a tres fuerzas no paralelas se encuentra en equilibrio, las líneas de acción de las fuerzas se cortarán en un punto y además formarán un triángulo cerrado.*

4.4 Diagrama de cuerpo libre

Para el análisis de equilibrio, los cuerpos rígidos se consideran sometidos a fuerzas externas, definidas como fuerzas aplicadas, las cuales se ejercen a través de conexiones con otros cuerpos o elementos, además de las reacciones en los apoyos o soportes, que comunican con estructuras fijas.

Es importante dibujar inicialmente un *diagrama de cuerpo libre,* que consiste en aislar el cuerpo rígido en consideración y sustituir cada conexión y apoyo existentes, por su respectiva fuerza equivalente, como se verá más adelante en los ejemplos resueltos.

A continuación, se describen con más detalle los apoyos de pasador liso, de rodillos y de empotramiento, los cuales son los más comunes y los más utilizados en construcciones.

El apoyo de pasador liso consta de un soporte unido a una estructura fija y un pasador liso que se inserta en el agujero de la barra o cuerpo, como se indica en la figura 4.4(a), de tal forma que le permite girar alrededor del pasador. Se caracteriza por que ofrece fuerzas

de reacción tanto en el eje *x* como en el eje *y*, como se observa en la figura 4.4(b). El apoyo de pasador liso se dibuja, en las estructuras, mediante un símbolo, como se ilustra en la figura 4.4(c).

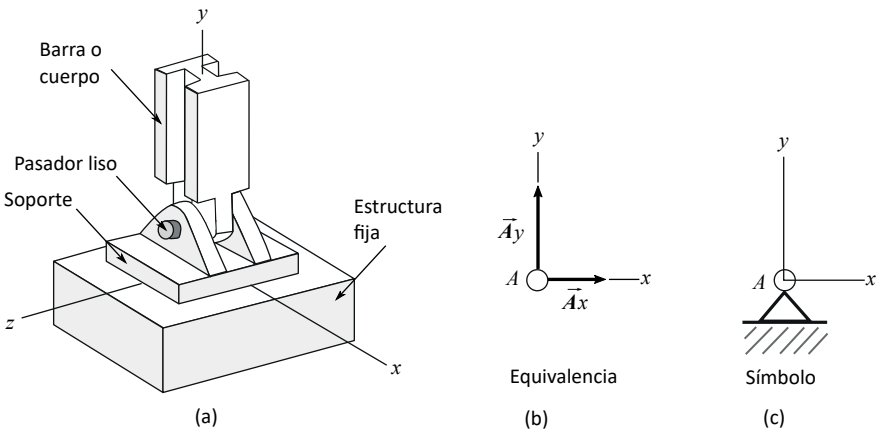


Figura 4.4

El apoyo de rodillos está compuesto básicamente de rodillos que descansan sobre una estructura fija, sobre los cuales se apoya un dispositivo similar a un apoyo de pasador liso, como se aprecia en la figura 4.5(a), y en conjunto se comporta como si fuera un patín, por cuanto solo ofrece fuerza de reacción en la dirección perpendicular a la superficie de apoyo y en sentido hacia afuera; por tal razón, es equivalente a una sola fuerza en el eje *y*, como se observa en la figura 4.5(b). Su símbolo se ilustra en la figura 4.5(c).

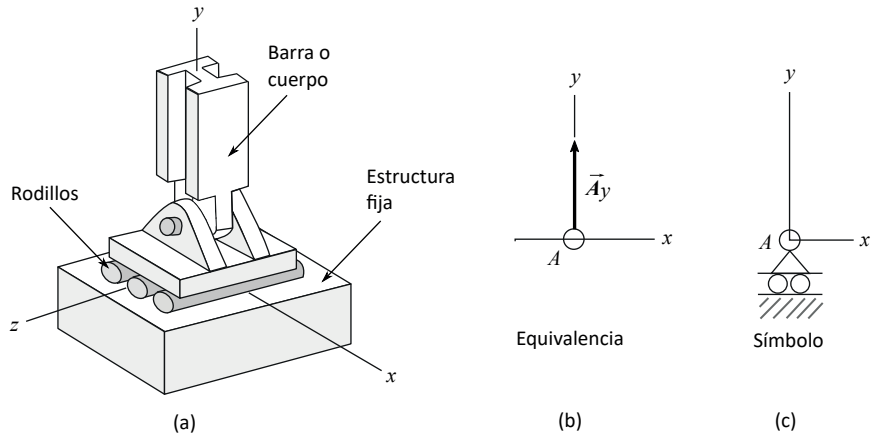


Figura 4.5

En el apoyo de empotramiento la barra o el cuerpo, que soporta las cargas, se encuentra incrustado o empotrado a una estructura fija, como se ilustra en la figura 4.6(a), y ofrece restricciones de movimientos tanto en los ejes x y y como al aplicarle cualquier momento en forma de un par, por lo tanto, es equivalente a dos fuerzas de reacción, una en el eje x y otra en el eje y, más un momento resistente, como se ilustra en la figura 4.6(b), y su símbolo se observa en la figura 4.6(c).

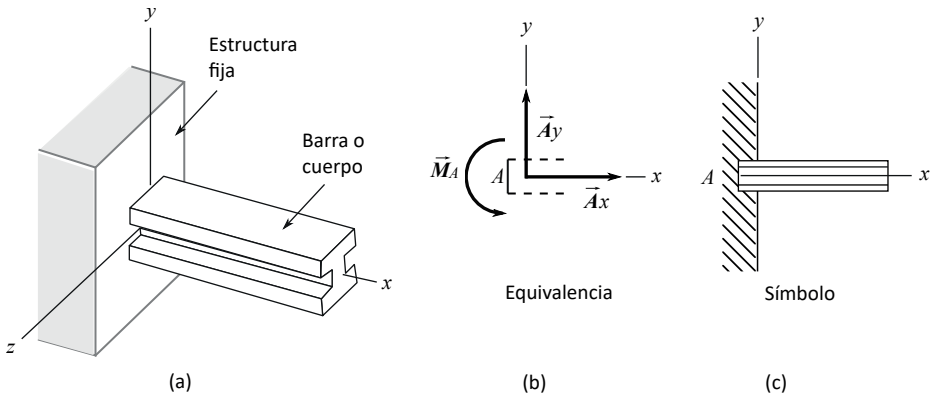


Figura 4.6

El procedimiento para resolver problemas de equilibrio de cuerpos rígidos en el plano consta de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre, que consiste en aislar el cuerpo o elemento en cuestión, con todas las fuerzas aplicadas, para lo cual es necesario identificar cada tipo de apoyo o conexión y sustituirlo por su respectiva fuerza equivalente.
2. Expresar cada una de las fuerzas en forma de componentes rectangulares según los ejes x y y.
3. Aplicar las ecuaciones de equilibrio, dadas mediante la relación 4.4, teniendo en cuenta que solo es posible resolver tres incógnitas.

4.4.1 Ejemplo 4.1

La viga *ABC* empotrada en el punto *A* se encuentra cargada como se indica en la figura 4.7(a). Determinar la reacción en el punto *A*.

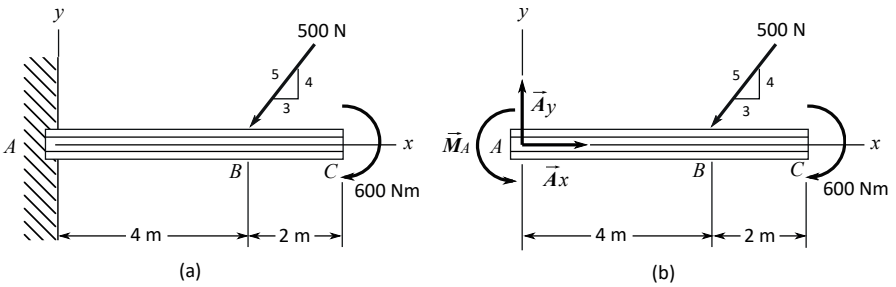


Figura 4.7

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga *ABC*, en donde, de acuerdo con las indicaciones de la figura 4.6, el apoyo de empotramiento se sustituye por dos fuerzas y un momento en el punto *A*, como se aprecia en la figura 4.7(b).

Se expresan cada una de las fuerzas en forma de componentes y se aplican las ecuaciones de equilibrio dadas, por la relación 4.4, así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: \; A_x - \left(\frac{3}{5}\right)500 \text{ N} = 0 \quad A_x = +300 \text{ N} \quad \vec{A}_x = \mathbf{300\ N} \rightarrow$$

$$\sum F_y + \uparrow = 0: \; A_y - \left(\frac{4}{5}\right)500 \text{ N} = 0 \quad A_y = +400 \text{ N} \quad \vec{A}_y = \mathbf{400\ N} \uparrow$$

$$\sum M_A + \curvearrowright = 0: \; -M_A + \left(\frac{4}{5}\right)(500 \text{ N})(4 \text{ m}) + \left(\frac{3}{5}\right)(500 \text{ N})(0) + 600 \text{ Nm} = 0$$

$$M_A = 1\,600 \text{ Nm} + 600 \text{ Nm} = +2\,200 \text{ Nm} \quad \vec{M}_A = \mathbf{2\,200\ Nm} \curvearrowleft$$

4.4.2 Ejemplo 4.2

Determinar las reacciones en los apoyos *A* y *E* de la armadura cargada como se indica en la figura 4.8(a).

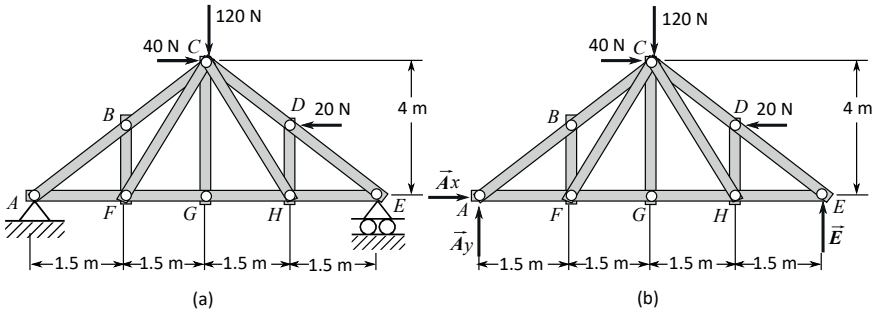


Figura 4.8

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre, como se aprecia en la figura 4.8(b), en donde se observa que, de acuerdo con las equivalencias dadas en las figuras 4.4 y 4.5, el apoyo de pasador liso en el punto A se reemplaza por dos fuerzas $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$, según los ejes x y y, respectivamente, y el de rodillos en el punto E se reemplaza por una sola fuerza vertical $\vec{E}$.

Se aplican las ecuaciones de equilibrio al tomar sumatoria de fuerzas y de momentos con respecto a un punto determinado para el cual se escoge, por lo general, el punto donde se encuentra el apoyo de pasador liso, por ofrecer dos incógnitas, que en este caso corresponde al punto A, así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: \; A_x + 40\ \text{N} - 20\ \text{N} = 0 \quad A_x = 20\ \text{N} - 40\ \text{N} = -20\ \text{N} \tag{1}$$

Dado que A_x resultó negativo, el sentido correcto no es hacia la derecha, como inicialmente fue supuesto, sino hacia la izquierda, de tal forma que, al corregir, queda así: $\vec{A}_x = \mathbf{20\ N}\ \leftarrow$.

$$\sum F_y + \uparrow = 0: \; A_y - 120\ \text{N} + E = 0 \tag{2}$$

$$\sum M_A + \curvearrowright = 0: \; +(40\ \text{N})(4\ \text{m}) + (120\ \text{N})(3\ \text{m}) - (20\ \text{N})(2\ \text{m}) - (E)(6\ \text{m}) = 0 \tag{3}$$

Los respectivos sentidos de los momentos de cada una de las fuerzas y sus correspondientes distancias se muestran en los croquis dados en la figura 4.9.

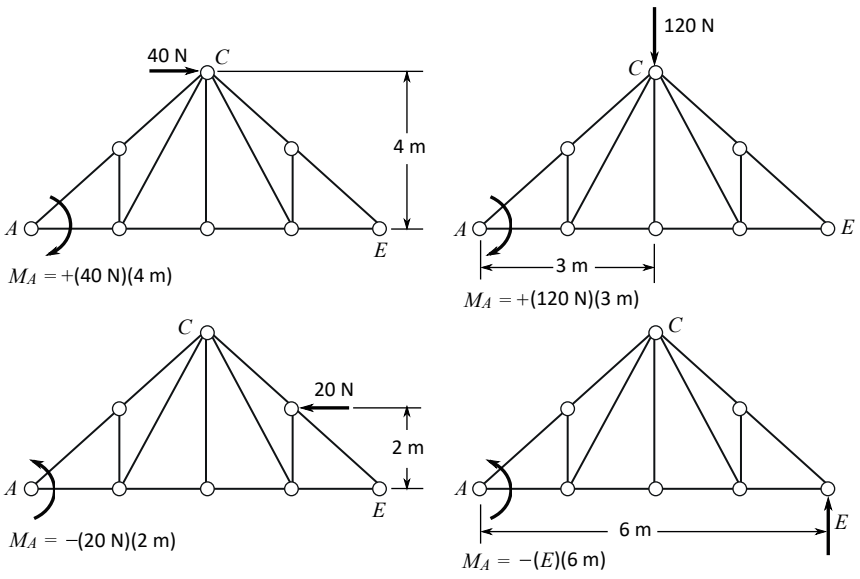


Figura 4.9

Como regla general, se debe tener presente que, para calcular los momentos de las fuerzas con respecto a un punto determinado, cuando se trata de una *fuerza horizontal,* o en el eje *x*, se multiplica por la *distancia vertical* que lo separa del punto, y cuando se trata de una *fuerza vertical,* o en el eje *y*, su distancia a multiplicar es *horizontal.* Por ejemplo, de acuerdo con la figura 4.9, el momento de la fuerza de 40 N con respecto al punto *A*, por ser horizontal, se multiplica por la distancia vertical de 4 m, mientras que la componente vertical de 120 N se multiplica por la distancia horizontal de 3 m, que lo separa de *A*.

Despejando *E*, de la ecuación 3, se tiene:

$$E = \frac{(40\ \text{N})(4\ \text{m}) + (120\ \text{N})(3\ \text{m}) - (20\ \text{N})(2\ \text{m})}{6\ \text{m}} = 80\ \text{N} \quad \vec{\boldsymbol{E}} = \mathbf{80\ N} \uparrow$$

Al reemplazar *E*, en la relación 2:

$$A_y = 120\ \text{N} - 80\ \text{N} = 40\ \text{N} \quad \vec{\boldsymbol{A}}_y = \mathbf{40\ N} \uparrow$$

4.4.3 Ejemplo 4.3

La barra *ABC* de la figura 4.10 se encuentra en equilibrio en la posición mostrada. Si el peso *W* = 120 lb, calcular las reacciones en los puntos de apoyo *A* y *C*.

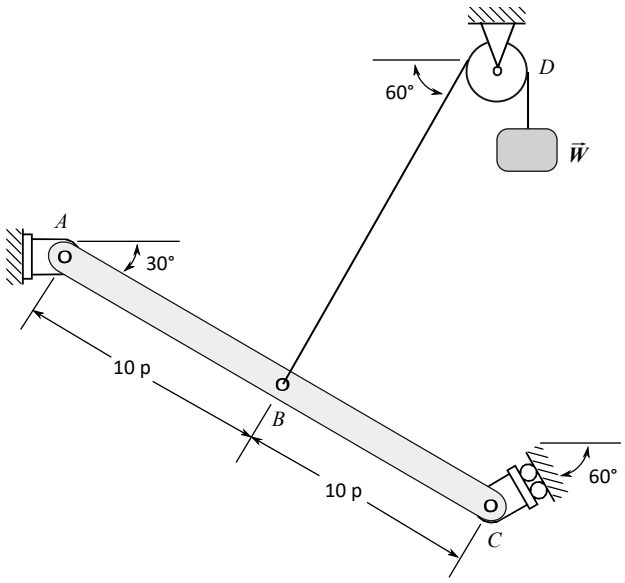


Figura 4.10

Solución

Se elabora inicialmente el diagrama de cuerpo libre, mostrado en la figura 4.11, y se identifican los siguientes elementos:

— Pasador liso en el punto *A*, el cual se reemplaza por dos fuerzas $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$, con sentidos desconocidos, aunque se suponen inicialmente hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente, los cuales serán corregidos, si es necesario, después al resolver las ecuaciones.
— Conexión de cable que actúa en el punto *B*, el cual se sustituye por una tensión de magnitud $T = W = 120$ lb, formando un ángulo de 60° como se indica en la figura, al considerar que la polea fija *D* puede girar libremente.
— Apoyo de rodillos correspondiente al extremo *C*, el cual se representa por una fuerza $\vec{C}$, en dirección perpendicular a la superficie de apoyo formando un ángulo de 90° – 60° = 30° con la horizontal, tal como se muestra, y de sentido hacia afuera de esta.

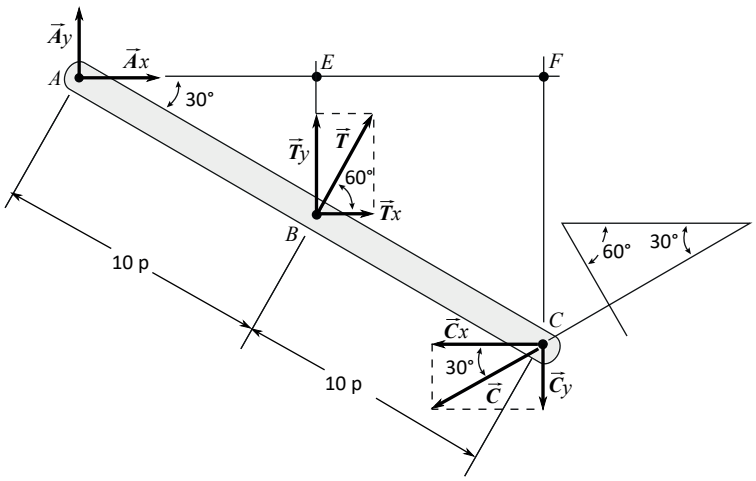


Figura 4.11

Se aplican ahora las ecuaciones de equilibrio, como lo expresa la relación 4.4:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: \; A_x + T_x - C_x = 0$$

Al sustituir los valores $T_x = T\,cos\,60° = 120\text{ lb}\,cos\,60° = 60\text{ lb}$ y $C_x = C\,cos\,30°$, se tiene:

$$A_x + 60\ \text{lb} - C\ cos\ 30° = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y + \uparrow = 0:\ A_y + T_y - C_y = 0$$

Al reemplazar los valores $T_y = T\ sen\ 60° = 120\ \text{lb}\ sen\ 60° = 103.92\ \text{lb}$ y $C_y = C\ sen\ 30°$, se obtiene:

$$A_y + 103.92\ \text{lb} - C\ sen\ 30° = 0 \quad (2)$$

Debido a que en el punto *A* se presenta el mayor número de incógnitas, o sea dos, se toma sumatoria de momentos con respecto a dicho punto, con el fin de eliminarlas, así:

$$\sum M_A + \curvearrowright = 0:\ -(T_x)(BE) - (T_y)(AE) + (C_x)(CF) + (C_y)(AF) = 0 \quad (3)$$

Siendo *BE*, *AE*, *CF* y *AF* las respectivas distancias perpendiculares desde las líneas de acción de las fuerzas $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$, $\vec{C}_x$ y $\vec{C}_y$ hasta el punto *A*, como se aprecia en la figura 4.11, o sea:

$$BE = 10\ \text{p}\ sen\ 30°\quad AE = 10\ \text{p}\ cos\ 30°\quad CF = 20\ \text{p}\ sen\ 30°\quad AF = 20\ \text{p}\ cos\ 30°$$

Al reemplazar valores en la ecuación 3, se obtiene:

$$-(60\ \text{lb})(10\ \text{p}\ sen\ 30°) - (103.92\ \text{lb})(10\ \text{p}\ cos\ 30°) + (C\ cos\ 30°)(20\ \text{p}\ sen\ 30°)$$
$$+ (C\ sen\ 30°)(20\ \text{p}\ cos\ 30°) = 0$$
$$-300\ \text{lbp} - 900\ \text{lbp} + 8.66(C)\ \text{p} + 8.66(C)\ \text{p} = 0$$

Al factorizar y despejar *C*:

$$(C)(8.66 + 8.66) = 300\ \text{lb} + 900\ \text{lb} = 1\ 200\ \text{lb}\quad \vec{C} = \mathbf{69.28\ lb}\ \swarrow$$

Al reemplazar *C* en las ecuaciones 1 y 2 y despejar A_x y A_y, se tiene:

$$A_x = 0\quad A_y = -69.28\ \text{lb}\quad \vec{A} = \mathbf{69.28\ lb}\ \downarrow$$

Solución gráfica

Se puede realizar una solución gráfica, de acuerdo con lo visto en la sección 4.3, al tener en cuenta que la barra *ABC* constituye un cuerpo rígido en equilibrio, sometido a tres fuerzas no paralelas, dadas por las reacciones en los puntos *A* y *C* y la correspondiente a la tensión de la cuerda aplicada en el punto *B*, por tanto, sus líneas de acción se cortarán en un punto y las fuerzas formarán un triángulo cerrado.

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la barra *ABC*, como se aprecia en la figura 4.12(a), en donde se observa que el ángulo de 60° formado por la tensión $\vec{T}$ con la horizontal *BH*, más el ángulo de inclinación de la barra *ABC* de 30°, con respecto a dicha

horizontal, suman 90°, lo cual indica que la línea de acción de la tensión $\vec{T}$ dada por *BD* es perpendicular a la barra *ABC*.

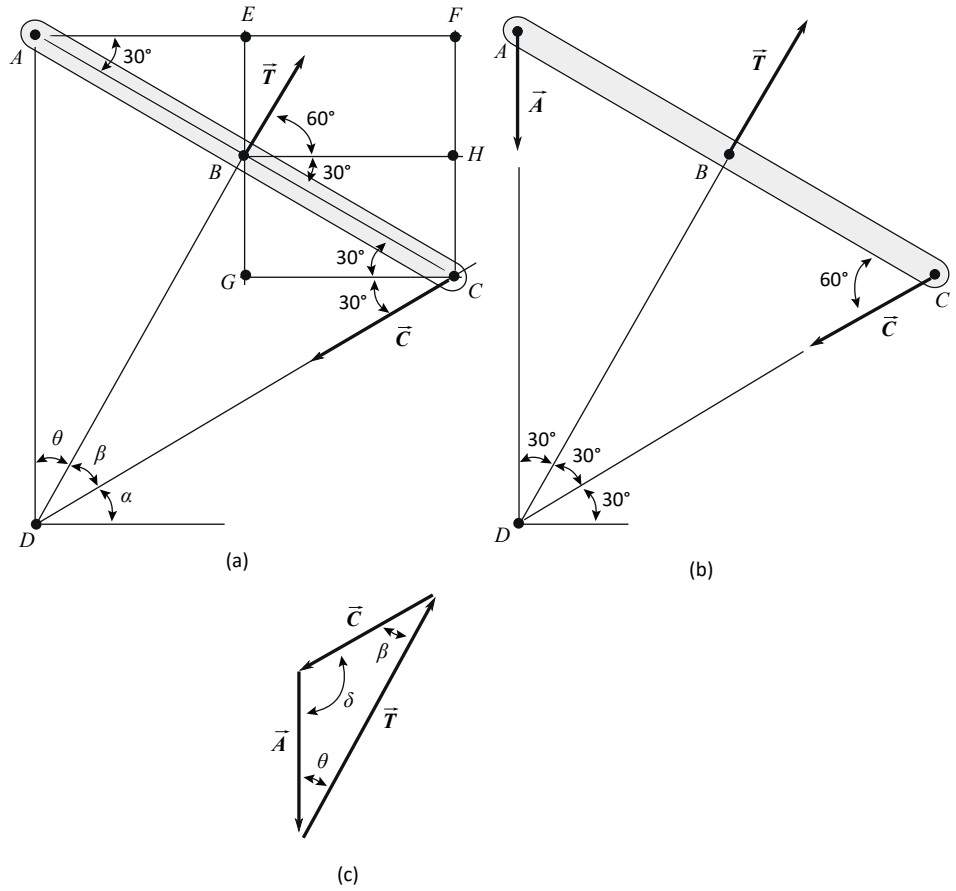


Figura 4.12

Por otro lado, el ángulo α que forma la línea de acción de la reacción $\vec{C}$, con la horizontal en el punto *D*, como se indica en la figura 4.12(a), es igual a 30°, por ser alterno interno con el ángulo que forma la reacción $\vec{C}$, con la horizontal *GC*.

Por consiguiente, en el punto *C*, de la barra *ABC*, se tienen dos ángulos de 30° con respecto a la horizontal *GC*, uno perteneciente a la inclinación de la barra *ABC* y el otro de la reacción $\vec{C}$, los cuales suman 60°, como se observa en la figura 4.12(b). Siendo así, y teniendo en cuenta que la línea *BD* es perpendicular a *BC*, como ya se ha dicho, entonces, el ángulo correspondiente a β, en la figura 4.12(a), es igual a 30°, como se indica en la figura 4.12(b).

De acuerdo con lo anterior, se encuentra definido el punto *D* como la intercepción de las líneas de acción de la tensión $\vec{T}$ y de la reacción $\vec{C}$, por lo cual solo falta trazar la línea de acción de la reacción $\vec{A}$, de tal manera que pase por el mismo punto *D*, como lo indica la línea *AD*, en la figura 4.12(a), quedando por determinar el ángulo θ.

Entonces, al considerar que la línea *BD* es perpendicular a la barra *ABC* y además que el punto *B* constituye el punto medio de la barra *ABC*, según la figura 4.11, entonces los ángulos opuestos a los tramos *AB* y *BC* serán iguales, o sea $\theta = \beta$, por lo tanto, se puede hallar el ángulo $\theta + \beta + \alpha = 30° + 30° + 30° = 90°$, formado por la línea de acción de la reacción $\vec{A}$, con la horizontal, como se ilustra en las figuras 4.12(a) y 4.12(b), dando como resultado que la reacción $\vec{A}$ es una fuerza vertical.

Conocidas las líneas de acción de las tres fuerzas $\vec{A}$, $\vec{C}$ y $\vec{T}$, se dibuja el triángulo de fuerzas ilustrado en la figura 4.12(c), en donde $\theta = 30°$ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{T}$, y además $\beta = 30°$ es el ángulo entre $\vec{C}$ y $\vec{T}$, como se observa en las figuras 4.12(a) y 4.12(b), por lo tanto, el ángulo $\delta = 180° - \theta - \beta = 180 - 30° - 30° = 120°$, entonces, al aplicar la ley de los senos, se tiene:

$$\frac{A}{sen\,\beta} = \frac{C}{sen\,\theta} = \frac{T}{sen\,\delta} \qquad \frac{A}{sen\,30°} = \frac{C}{sen\,30°} = \frac{120\text{ lb}}{sen\,120°}$$

$$A = \frac{(sen\,30°)120\text{ lb}}{sen\,120°} = 69.28\text{ lb} \qquad \vec{A} = \mathbf{69.28\ lb}\downarrow$$

$$C = \frac{(sen\,30°)120\text{ lb}}{sen\,120°} = 69.28\text{ lb} \qquad \vec{C} = \mathbf{69.28\ lb}\swarrow$$

4.4.4 Ejemplo 4.4

La grúa deslizante *ABC*, mostrada en la figura 4.13, soporta un peso de 100 N en el extremo *C* y se encuentra apoyada mediante pasadores lisos en los puntos *A*, con una estructura fija, y *B*, por medio de una palanca *BD*, la cual se conecta a la estructura fija con otro pasador liso en *D*. Determinar las reacciones en los puntos *A*, *B* y *D*.

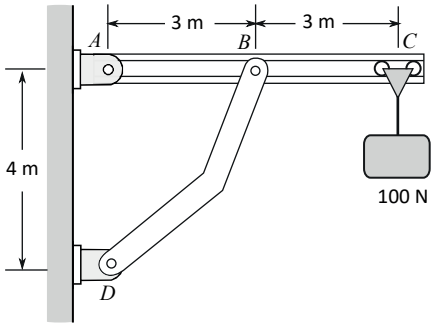


Figura 4.13

Solución

Se elabora el diagrama de cuerpo libre de la grúa *ABC*, como se ilustra en la figura 4.14(a). Se observa que en el punto *A*, por tratarse de un pasador liso, se reemplaza por dos fuerzas equivalentes $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$, las cuales se suponen ambas con sentidos positivos, para después corregirlos si es necesario.

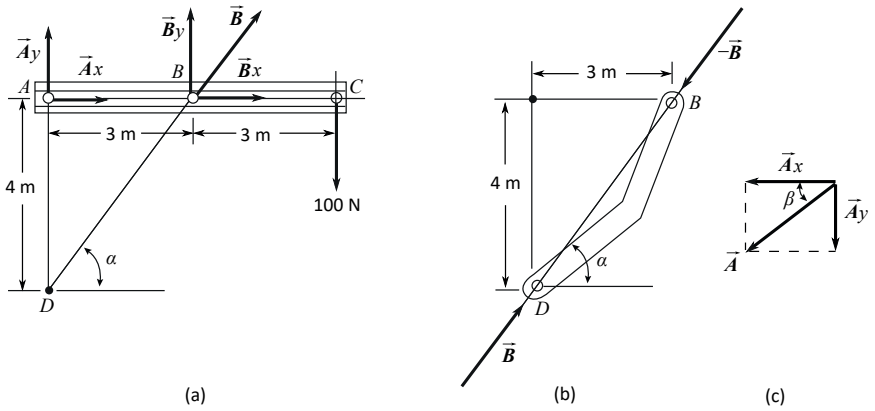


Figura 4.14

En el punto *B* se encuentra un pasador liso unido a una palanca *BD*, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 4.14(b); de acuerdo con lo visto en la sección 4.3, por estar sometida la palanca *BD* a solo dos fuerzas, estas serán iguales, de sentidos contrarios y la misma dirección, dada por el ángulo α. Para determinar el ángulo α, se tiene que $tan\ \alpha = 4\ \text{m}/3\ \text{m}$, entonces $\alpha = 53.13°$.

Se debe tener en cuenta que *B* es un punto de contacto entre la grúa *ABC* y la palanca *BD*, por lo tanto, se presentan dos fuerzas $\vec{B}$ y $-\vec{B}$, como se aprecia en las figuras 4.14(a) y 4.14(b). $\vec{B}$ es la fuerza que ejerce la palanca sobre la grúa y $-\vec{B}$ es la reacción de la grúa sobre la palanca, las cuales son iguales y de sentidos contrarios, por estar en equilibrio, aunque para el estudio de la grúa *ABC* resulta de interés solo la fuerza *B*.

Conocida la dirección de $\vec{B}$, dada por el ángulo $\alpha = 53.13°$, las componentes quedan expresadas así:

$$B_x = B\ cos\ \alpha = B\ cos\ 53.13° \quad B_y = B\ sen\ \alpha = B\ sen\ 53.13°$$

Se aplican ahora las ecuaciones de equilibrio, así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0:\ A_x + B\ cos\ 53.13° = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y + \uparrow\ = 0:\ A_y + B\ sen\ 53.13° - 100\ \text{N} = 0 \tag{2}$$

$$\sum M_A + \curvearrowright\ = 0:\ -(B\ sen\ 53.13°)(3\ \text{m}) + (100\ \text{N})(6\ \text{m}) = 0 \tag{3}$$

Al despejar B, de la ecuación 3:

$$B = \frac{(100\ \text{N})(6\ \text{m})}{(B\ sen\ 53.13°)} = 250\ \text{N} \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \mathbf{250\ N}\ \nearrow$$

Se reemplaza la magnitud de B, en la ecuación 1, para hallar A_x, así:

$$A_x = -\ B\ cos\ 53.13° = -(250\ \text{N})\ cos\ 53.13° = -150\ \text{N} \quad \vec{\boldsymbol{A}}_x = \mathbf{150\ N}\ \leftarrow$$

Al despejar A_y de la ecuación 2, se tiene:

$$A_y = 100\ \text{N} - \ B\ sen\ 53.13° = 100\ \text{N} - (250\ \text{N})\ sen\ 53.13° = -100\ \text{N}\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = \mathbf{100\ N}\ \downarrow$$

Los signos negativos tanto en A_x como en A_y indican que los sentidos tomados son invertidos a los supuestos inicialmente, por lo que al corregirlos quedan expresados como se ha indicado. La reacción resultante en $\vec{\boldsymbol{A}}$, como se muestra en la figura 4.14(c), se puede calcular así:

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}\ \text{N} = \sqrt{150^2 + 100^2}\ \text{N} = 180.27\ \text{N}$$

$$tan\,\beta = A_y/A_x = 100\ \text{N}/150\ \text{N} \qquad \beta = tan^{-1}(0.667) = 33.69° \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \mathbf{180.27\ N}\ \swarrow$$

En cuanto a la reacción en $\vec{\boldsymbol{D}}$, en la figura 4.14(b), se puede apreciar que son iguales, de tal manera que:

$$\vec{\boldsymbol{D}} = \vec{\boldsymbol{B}} = \mathbf{250\ N}\ \nearrow$$

Solución gráfica

Una solución gráfica consiste en aplicar lo contemplado en la sección 4.3, en el sentido de que si un cuerpo rígido en el plano sometido a tres fuerzas no paralelas se encuentra en equilibrio, sus líneas de acción se cortarán en un punto y, además, formarán un triángulo cerrado de fuerzas.

El procedimiento consiste en que, una vez identificadas las tres fuerzas, se requiere conocer inicialmente las líneas de acción de dos de ellas y el punto donde se interceptan, y este será el mismo punto por donde deberá pasar la línea de acción de la tercera fuerza.

Para el caso de la grúa *ABC*, las tres fuerzas son: las reacciones en los puntos *A* y *B*, más el peso de 100 N, que actúa en el punto *C*, como se muestran en la figura 4.15(a). Se conocen la línea de acción del peso de 100 N, la cual es vertical, y la línea de acción de la reacción $\vec{\boldsymbol{B}}$ definida por el ángulo de 53.13° que forma la línea que une los puntos *B* y *D* con la horizontal, las cuales se extienden hasta encontrarse en el punto *E*, como se indica en la figura 4.15(a). Entonces, la línea de acción de la tercera fuerza o reacción $\vec{\boldsymbol{A}}$ se traza de tal manera que pase por el punto *E*, como se ilustra en la figura 4.15(b).

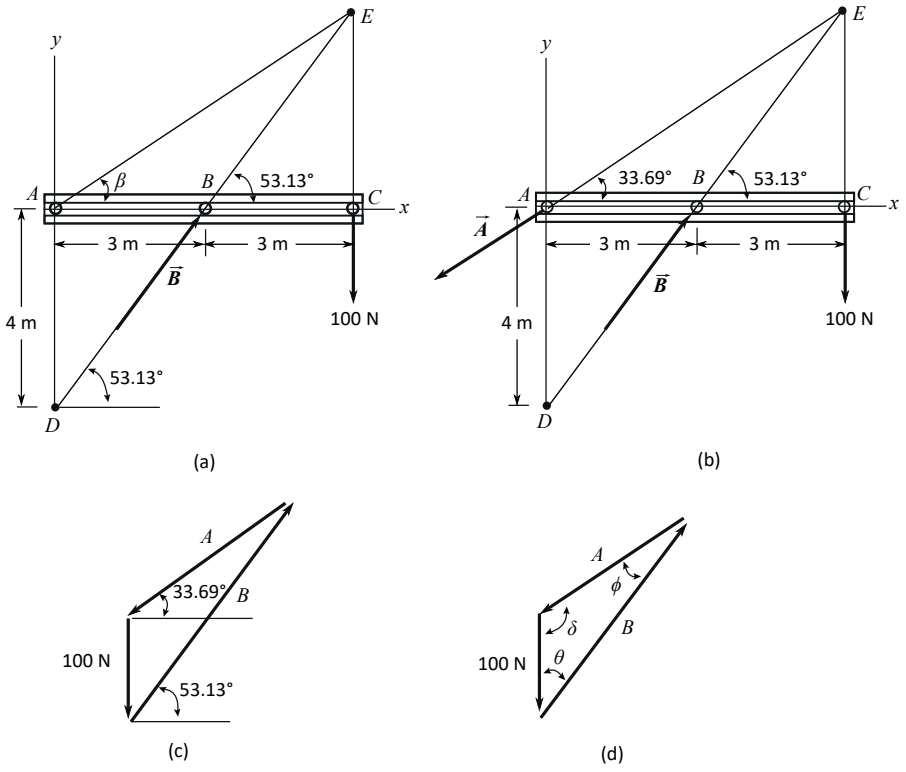


Figura 4.15

La línea *AE*, como se indica en la figura 4.15(b), determina la dirección de la reacción $\vec{A}$, dada por el ángulo β, el cual se calcula, conociendo que la altura *CE* es común tanto para el ángulo de 53.13° como para el ángulo β, así:

$$tan\,53.13° = \frac{CE}{3\text{ m}} \quad CE = (3\text{ m})\,tan\,53.13° = 4\text{ m}$$

$$tan\,\beta = \frac{CE}{6\text{ m}} = \frac{4\text{ m}}{6\text{ m}} = 0.67 \quad \beta = 33.69°$$

Conocidos los ángulos α = 53.13°, que define la dirección de la reacción $\vec{B}$, y β = 33.69°, que determina la dirección de la reacción $\vec{A}$, como se ilustra en la figura 4.15(c), se trata de calcular los ángulos θ, δ y φ, pertenecientes al triángulo cerrado de fuerzas mostrado en la figura 4.15(d), así:

$$\theta = 90° - 53.13° = 36.87° \quad \delta = 90° + 33.69° = 123.69°$$

$$\phi = 180° - \theta - \phi = 180° - 36.87° - 123.69° = 19.44°$$

Ahora, se aplica la ley de los senos para calcular las relaciones entre las magnitudes de las fuerzas $\vec{A}$, $\vec{B}$ y 100 N, así:

$$\frac{A}{sen\,\theta} = \frac{B}{sen\,\delta} = \frac{100\text{ N}}{sen\,\phi} \qquad \frac{A}{sen\,36.87°} = \frac{B}{sen\,123.69°} = \frac{100\text{ N}}{sen\,19.44°}$$

$$A = \frac{(100\text{ N})(sen\,36.87°)}{(sen\,19.44°)} = 180.27\text{ N} \qquad \vec{A} = \mathbf{180.27\ N}\ \swarrow$$

$$B = \frac{(100\text{ N})(sen\,123.69°)}{(sen\,19.44°)} = 250\text{ N} \qquad \vec{B} = \mathbf{250\ N}\ \nearrow$$

4.5 Indeterminación estática

Para realizar el análisis de equilibrio de un cuerpo rígido se requiere que se encuentre adecuadamente soportado ante sistemas generales de cargas. Desde el punto de vista de los procedimientos regulares de la estática, consiste en calcular fuerzas desconocidas, al aplicar las relaciones 4.3 o 4.4, con las cuales es posible resolver seis incógnitas para un cuerpo considerado en el espacio y solo hasta tres cuando se encuentra en el plano.

En relación con los tipos de apoyos, para resistir cargas, pertenecientes a un cuerpo rígido en el plano, se pueden analizar básicamente tres clases de situaciones diferentes:

- *Caso 1. Restricciones insuficientes:* cuando una viga como la mostrada en la figura 4.16(a) cuenta con dos apoyos de rodillos en los puntos *A* y *B*, como se indica, se dice que se encuentra insuficientemente soportada para sistemas generales de cargas, porque, aunque sus apoyos responden a fuerzas aplicadas en dirección vertical, no ofrecen restricciones a cargas que actúan en dirección horizontal. La viga estará en equilibrio solo para solicitudes de fuerzas verticales. El número de incógnitas presentadas por las reacciones es dos, $\vec{A}_y$ y $\vec{B}_y$, de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre ilustrado en la figura 4.16(b), por lo tanto, para la solución solo se requieren dos ecuaciones.
- *Caso 2. Restricciones suficientes:* para el caso de la viga con un apoyo de pasador liso en el punto *A* y otro de rodillos en el punto *B*, como se observa en la figura 4.16(c), sus soportes sí ofrecen reacciones ante sistemas generales de carga, las cuales se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 4.16(d) como $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ y $\vec{B}_y$, por lo tanto, se encuentra apoyada adecuadamente. El número de incógnitas es tres, el sistema se resuelve con tres ecuaciones y se dice que es estáticamente determinado.
- *Caso 3. Restricciones redundantes:* si los tipos de apoyos con los que cuenta un cuerpo rígido presentan más restricciones que las necesarias, ante sistemas generales de cargas, se dice que se encuentra estáticamente indeterminado, como la viga mostrada en la figura 4.16(e), que contiene apoyos de pasador liso en los puntos *A* y *B*. El número de incógnitas en este caso es cuatro, $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{B}_x$ y $\vec{B}_y$, como se aprecia en el diagrama

de cuerpo libre de la figura 4.16(f), y el número de ecuaciones con las que se cuenta para su solución es solo de tres. O sea que no se puede resolver por los métodos de la estática, sino que requiere adicionalmente de procedimientos especializados, como el de análisis de deformaciones, perteneciente al estudio de la mecánica de materiales.

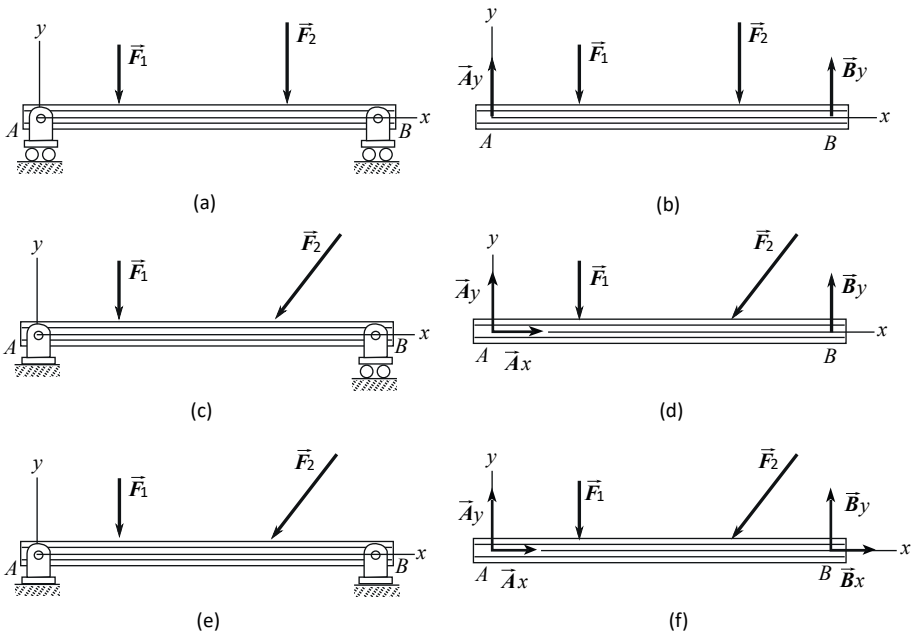
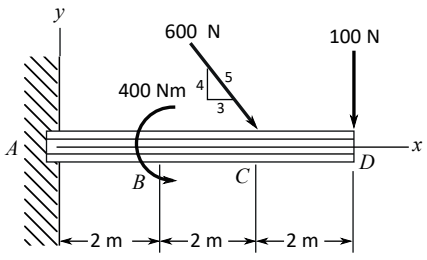


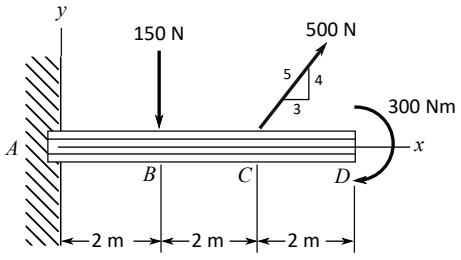
Figura 4.16

4.6 Problemas propuestos

Problemas 4.1 y 4.2. Para cada una de las vigas *ABCD* empotradas en el punto *A* y cargadas como se indica en las figuras, determinar la reacción en *A*.

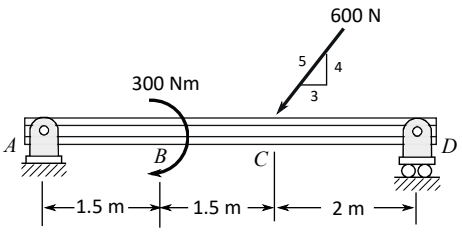


Problema 4.1

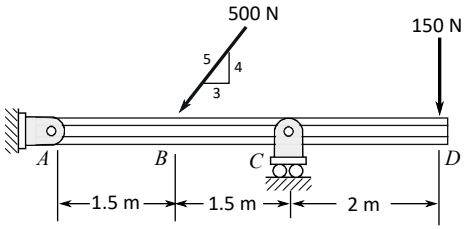


Problema 4.2

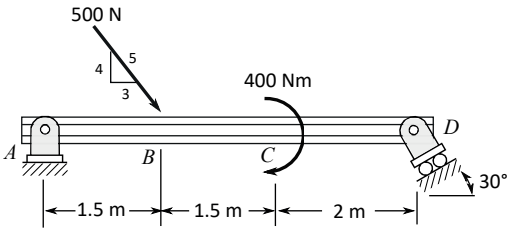
Problemas 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6. En relación con las vigas *ABCD* soportadas y cargadas como se muestra en las respectivas figuras, determinar las reacciones en los apoyos.



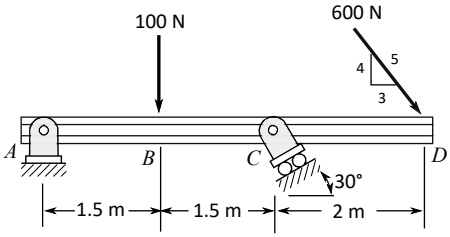
Problema 4.3



Problema 4.4



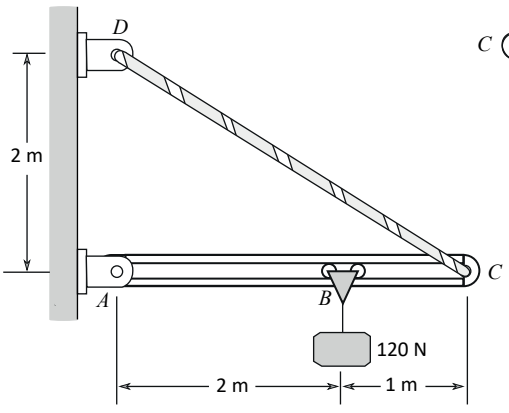
Problema 4.5



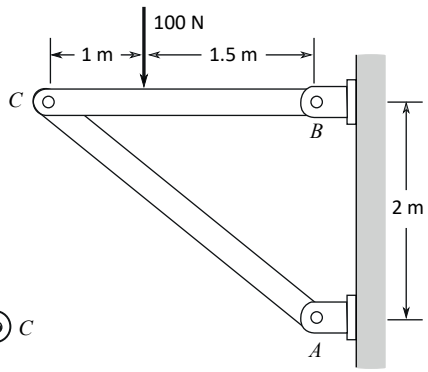
Problema 4.6

Problema 4.7. La grúa deslizante *ABC*, apoyada por un pasador liso en *A* y una cuerda *CD*, en el punto *C*, soporta un peso en el punto *B*, como se aprecia en la figura. Calcular la reacción en *A* y la tensión en la cuerda.

Problema 4.8. Para la barra *BC* cargada y soportada como se indica, determinar las reacciones en *A* y *B*.

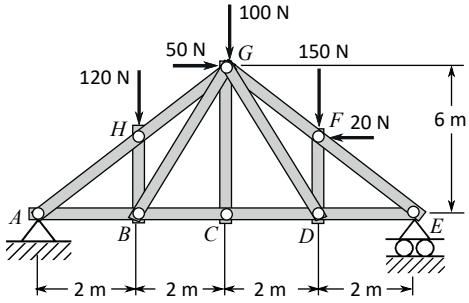


Problema 4.7

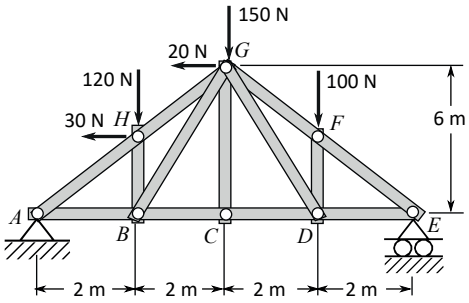


Problema 4.8

Problemas 4.9 y 4.10. Para cada una de las armaduras mostradas en las figuras, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *E*.

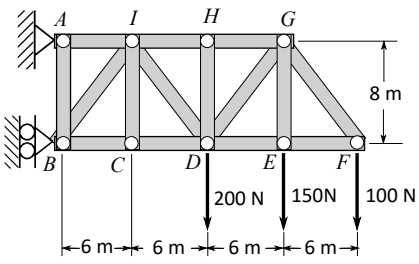


Problema 4.9

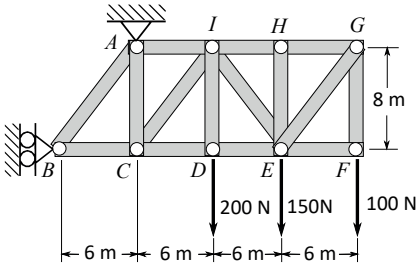


Problema 4.10

Problemas 4.11 y 4.12. Para cada una de las armaduras mostradas en las figuras, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *B*.

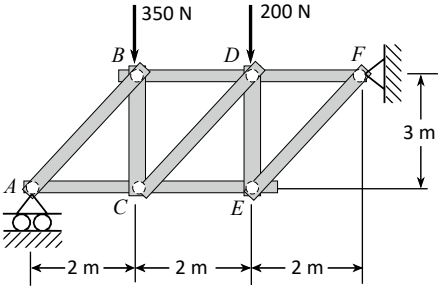


Problema 4.11

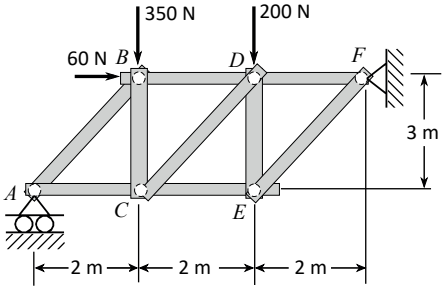


Problema 4.12

Problemas 4.13 y 4.14. Para cada una de las armaduras mostradas en las figuras, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *F*.



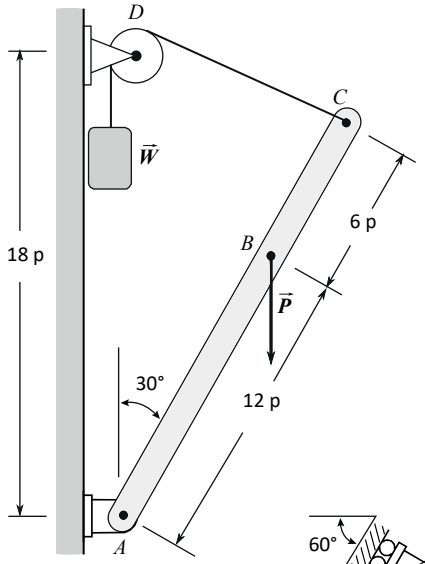
Problema 4.13



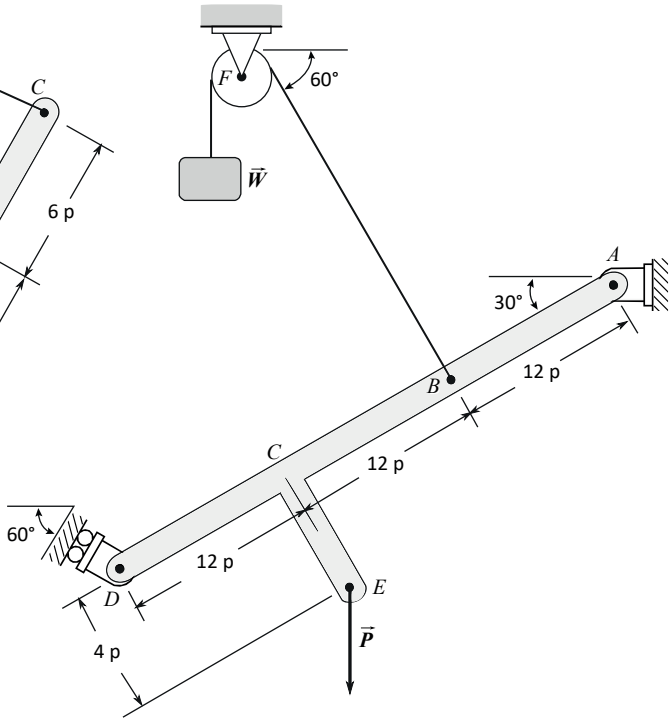
Problema 4.14

Problema 4.15. Teniendo en cuenta que el peso W = 120 lb y que la polea D puede girar libremente, calcular la fuerza $\vec{P}$ necesaria para mantener el equilibrio de la barra ABC en la posición mostrada en la figura y la correspondiente reacción en el punto A.

Problema 4.16. Una palanca $ABCDE$, en forma de T, apoyada en los puntos A y D, como se muestra en la figura, se encuentra sometida a una fuerza vertical $\vec{P}$, aplicada en el punto E, y a la tensión ejercida en el punto B, por un cable que sostiene un peso W = 150 lb, mediante una polea F que puede girar libremente, como se indica. Determinar: *a*) las reacciones en A y D si la fuerza $\vec{P}$ = 0, *b*) las reacciones en A y D si P = 60 lb y *c*) la fuerza $\vec{P}$ necesaria para mantener el equilibrio en la posición mostrada y la respectiva reacción en A si se elimina el apoyo en el punto D.



Problema 4.15



Problema 4.16

Análisis de armaduras

5

Objetivos del capítulo

- Estudiar las armaduras en el plano, consideradas como estructuras estáticamente determinadas.
- Analizar los tipos de cargas aplicadas a una armadura y diferenciar las fuerzas como externas o internas.
- Identificar las barras de fuerzas conocidas y estudiar las cargas en armaduras comunes, usadas para techos y para puentes.
- Calcular las fuerzas soportadas por cada una de las barras y definir su estado de tensión o compresión mediante el método de los nudos y el de las secciones.

5.1 Introducción

Las armaduras se pueden definir como estructuras formadas por barras rectas unidas en sus extremos mediante elementos de sujeción denominados *nudos* o *nodos*.

Los nudos representan los puntos de aplicación de las cargas, y aunque pueden estar compuestos por piezas atornilladas o soldadas, con el fin de garantizar una unión firme, para efectos de cálculos se toman como si fueran pasadores lisos, al considerar que las mencionadas cargas son trasladadas a las barras solo como fuerzas axiales de tensión o de compresión.

Las armaduras se usan en techos y en puentes, y son construidas como estructuras espaciales, aunque en su montaje y en la mayor parte de los cálculos son tratadas como ensambles de armaduras planas, con travesaños y largueros especialmente dispuestos como elementos de transferencia de cargas hacia los nudos.

Los tipos más comunes de armaduras, los cuales toman su nombre de sus creadores y del destino que cumplen, se muestran en la figura 5.1.

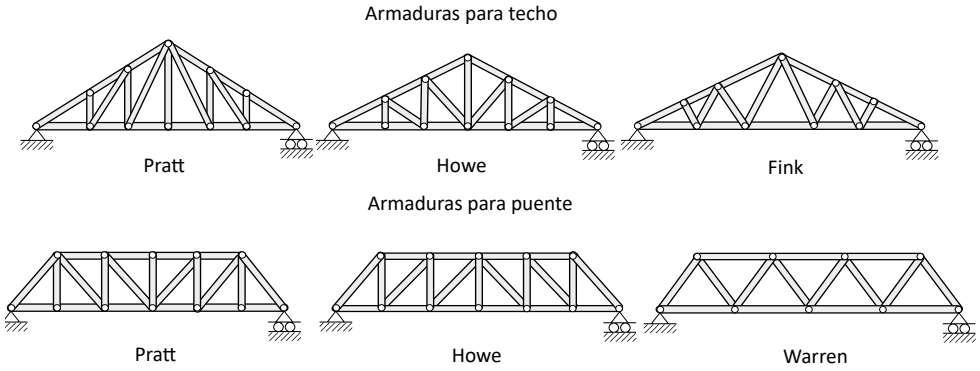


Figura 5.1

5.2 Fuerzas internas y externas

El análisis de una armadura consiste básicamente en hallar las fuerzas soportadas por cada una de las barras y definir también si se encuentran sometidas a tensión o a compresión. Para tal fin es necesario diferenciar entre fuerzas internas y externas. Mientras que las *fuerzas internas* se refieren a las resistentes ofrecidas por las barras, las *fuerzas externas* están compuestas por las aplicadas a la armadura en sí, considerada como un cuerpo rígido, más las reacciones en los apoyos.

Para determinar las fuerzas en las barras o fuerzas internas, es necesario hallar primero las fuerzas externas. Para lograrlo, se trata la armadura como un cuerpo rígido en equilibrio, elaborando el respectivo diagrama de cuerpo libre y aplicando después las respectivas ecuaciones. Posteriormente se calculan dichas fuerzas, aplicando uno de los dos procedimientos: el método de los nudos o el método de las secciones, los cuales se verán más adelante.

5.3 Barras a tensión o a compresión

Considere la armadura mostrada en la figura 5.2(a), compuesta por las barras *AB*, *AC* y *BC* y los apoyos, de pasador liso en *A* y de rodillos en *B*, sometida a una fuerza vertical $\vec{F}$ aplicada en el punto *C*.

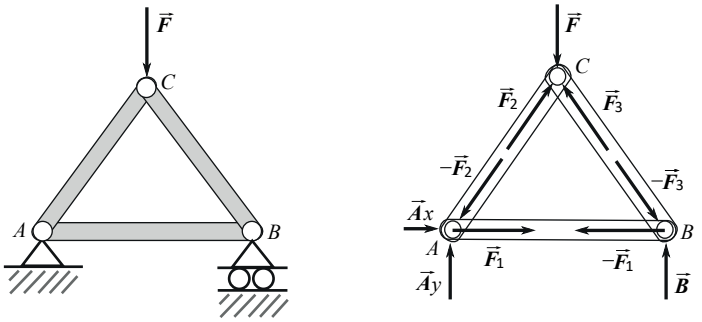


Figura 5.2

Si se realiza un corte en la barra *AB*, se observa que el punto *B* tiende a alejarse del punto *A*, o sea dicha barra trata de alargarse, lo cual es compensado por las fuerzas internas de reacción $\vec{F}_1$ y $-\vec{F}_1$, como se muestra en la figura 5.2(b). Se dice, entonces, que la barra *AB* está sometida a tensión y para expresarlo se dibujan dos fuerzas iguales y de sentido contrario, $\vec{F}_1$ y $-\vec{F}_1$, dirigidas hacia el centro de esta.

Al efectuar cortes también en las barras *AC* y *BC*, y a diferencia de lo que sucede con la barra *AB*, se aprecia la tendencia del punto *C* a bajar, o sea las barras *AC* y *BC* más bien tratan de acortarse, por lo cual se presentan las respectivas fuerzas de reacción $\vec{F}_2$ y $-\vec{F}_2$, en la barra *AC*, y $\vec{F}_3$ y $-\vec{F}_3$, en la barra *BC*, orientadas desde el centro hacia afuera de cada barra, como se aprecia en la figura 5.2(b). Lo anterior indica que las barras *AC* y *BC* se encuentran sometidas a compresión.

Teniendo en cuenta la representación de fuerzas mostradas en la figura 5.2(b), se afirma que si una barra se encuentra a tensión, como la barra *AB*, los sentidos de las fuerzas en los nodos *A* y *B* se indican hacia afuera de ellos; por el contrario, si la barra está a compresión, como en los casos *AC* o *BC*, los respectivos sentidos de las fuerzas se dibujan entrando a los nodos.

5.4 Barras de fuerzas conocidas

Las barras de fuerzas conocidas se dan en aquellos casos de barras alineadas pertenecientes a un nodo común, como las mostradas en la figura 5.3, en donde se clasifican los siguientes:

— *Caso 1:* un par de barras alineadas, *AB* y *AC*, unidas mediante un nodo común *A*, en donde no existe una carga aplicada, como se muestra en la figura 5.3(a), por tanto, las

respectivas fuerzas $\vec{F}_{AB}$ y $\vec{F}_{AC}$ serán iguales en magnitud y de sentidos contrarios, por considerarse el punto *A* como una partícula en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas.

— *Caso 2:* dos pares de barras alineadas, *AB* con *AC* y *AD* con *AE*, unidas mediante un nodo común *A*, como se indica en la figura 5.3(b), por lo que, al estar en equilibrio, las fuerzas $\vec{F}_{AB}$ con $\vec{F}_{AC}$ serán iguales y de sentidos contrarios, y lo mismo ocurre con $\vec{F}_{AD}$ y $\vec{F}_{AE}$.

— *Caso 3:* similar al caso anterior, solo que la barra *AE* es reemplazada por la fuerza $\vec{F}$, como se aprecia en la figura 5.3(c), por tanto, las fuerzas $\vec{F}_{AB}$ con $\vec{F}_{AC}$ son iguales y de sentidos contrarios y la fuerza $\vec{F}_{AD}$ es igual y de sentido contrario a $\vec{F}$.

— *Caso 4:* el mismo caso 3, con la diferencia de que la fuerza $\vec{F}$ no existe, o sea es igual a cero, como se ilustra en la figura 5.3(d), por tanto, las fuerzas $\vec{F}_{AB}$ y $\vec{F}_{AC}$ son iguales y contrarias y $\vec{F}_{AD} = 0$.

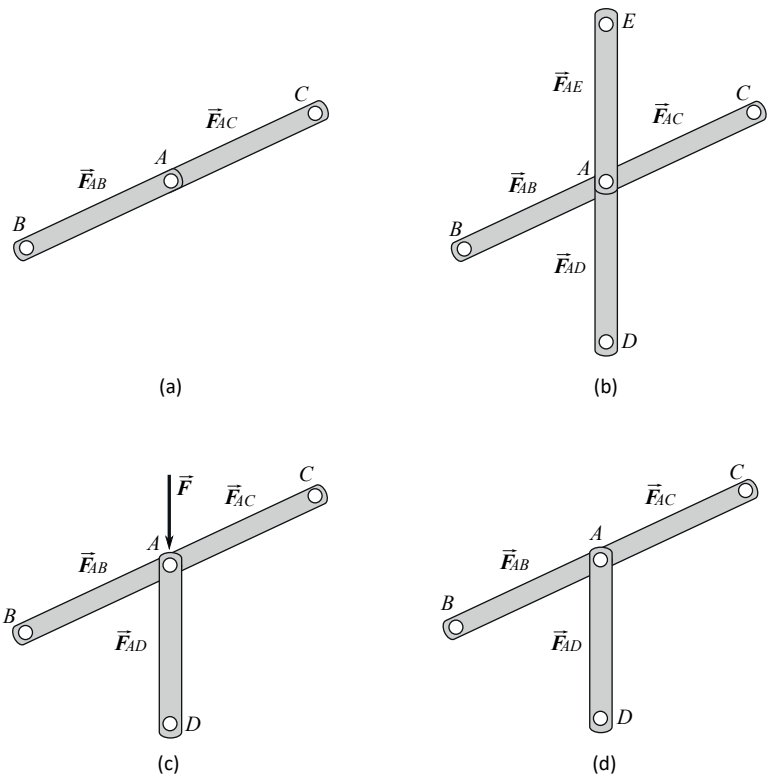


Figura 5.3

En la armadura tipo Howe para techo, mostrada en la figura 5.4, se pueden señalar barras de fuerzas conocidas de acuerdo con los cuatro casos vistos. Por ejemplo, los no-

dos *C* y *G*, de la figura 5.4(a), son equivalentes al caso 4, por tanto, en el nodo *C*, la fuerza en la barra *CB* es igual a cero y las fuerzas en las barras *CA* y *CE* son iguales y de sentidos contrarios. Una situación similar ocurre en el nodo *G*: la fuerza en *GF* es igual a cero y las fuerzas en *GE* y *GH* son iguales y contrarias.

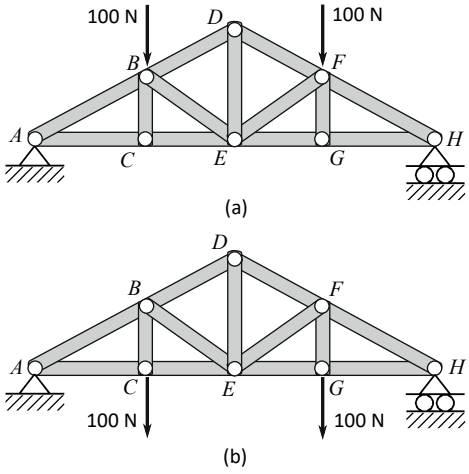


Figura 5.4

Al estudiar la misma armadura cargada como se muestra en la figura 5.4(b), con los mismos nodos analizados de acuerdo con la figura 5.4(a), su situación es asimilable ahora al caso 3: la fuerza en la barra *CB* es igual y de sentido opuesto a la fuerza de 100 N y las fuerzas en las barras *CA* y *CE* iguales y contrarias. Lo mismo sucede en el nodo *G*: la fuerza en *GF* es igual y contraria a la de 100 N, así como las de *GE* y *GH* son iguales y de sentidos opuestos.

Al comparar las armaduras cargadas como se indica en las figuras 5.4(a) y 5.4(b), se observa que se encuentran bajo las mismas fuerzas de 100 N, con la diferencia de que en la figura 5.4(a) las fuerzas de 100 N se encuentran aplicadas en los nodos *B* y *F*, mientras que en la figura 5.4(b) las fuerzas han pasado respectivamente a los nodos *C* y *G*. En consecuencia, las fuerzas en las barras *CB* y *GF* han pasado de resistir fuerza cero, de acuerdo con la figura 5.4(a), a soportar fuerza de 100 N, conforme a la figura 5.4(b).

Lo anterior expresa el hecho de que el principio de transmisibilidad no es válido cuando se trata de analizar las fuerzas internas en un cuerpo rígido. La conclusión es que el traslado de las fuerzas de 100 N, aunque no afecta el equilibrio de la armadura, sí influye en las fuerzas soportadas por las barras, las cuales son consideradas, por eso, como fuerzas internas.

Aunque con base en los cálculos, las barras de fuerza cero no soportan cargas, las barras en sí son necesarias para mantener la estabilidad de la armadura y no se pueden suprimir,

porque su condición de no resistir fuerzas es solo aparente y, además, porque pueden ser requeridas para eventuales casos en que las situaciones de carga de la armadura cambien.

5.5 Método de los nudos

El *método de los nudos,* para determinar las fuerzas en las barras, se basa en el hecho de que, al encontrarse toda la armadura en equilibrio, asimismo estarán en equilibrio cada uno de los nudos o puntos de carga. Un nodo o nudo puede ser el punto común para fuerzas de las barras, para cargas aplicadas o para reacciones en los apoyos, o las tres a la vez, y su análisis pertenece al equilibrio de partículas, por lo tanto, consta de sumar fuerzas concurrentes e igualarlas a cero.

En términos generales, para calcular la fuerza en una barra en particular de una armadura, por este método, se requiere del análisis individual de equilibrio, nodo por nodo, desde un punto inicial que contenga solo dos incógnitas, hasta llegar al nodo en donde se encuentra la barra en cuestión, el cual puede ser el punto donde existan más de dos fuerzas desconocidas.

El procedimiento anterior es necesario, porque se trata de fuerzas concurrentes en un punto y su análisis para el caso de armaduras en el plano se basa en efectuar suma de fuerzas en el eje *x* y en el eje *y* para igualarlas a cero, lo que condiciona el método a solucionar máximo dos incógnitas por cada nudo. Siendo así, resulta conveniente solo cuando se requiere encontrar las fuerzas en todas las barras. El ejemplo presentado a continuación ilustrará acerca de dicho método.

5.5.1 Ejemplo 5.1

Determinar las fuerzas en las barras *BD* y *BE* de la armadura mostrada en la figura 5.5(a) utilizando el método de los nudos y definir, además, si se encuentran a tensión o a compresión.

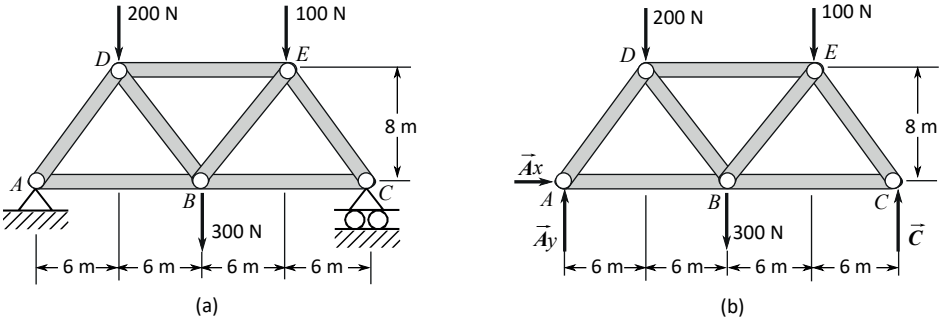


Figura 5.5

Solución

Inicialmente se hallan las reacciones en los apoyos, para lo cual es necesario elaborar el diagrama de cuerpo libre de la armadura, que aparece en la figura 5.5(b), y aplicar, además, las respectivas ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: \quad \vec{\boldsymbol{A}}_x = 0$$

$$\sum M_A + \curvearrowright = 0: \quad (200\ \text{N})(6\ \text{m}) + (300\ \text{N})(12\ \text{m}) + (100\ \text{N})(18\ \text{m}) - (24\ \text{m})(C) = 0$$

$$\boldsymbol{C = +275\ \text{N}} \quad \vec{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{275\ \text{N}} \uparrow$$

$$\sum F_y + \uparrow = 0: \ A_y - 200\ \text{N} - 300\ \text{N} - 100\ \text{N} + C = 0 \quad \boldsymbol{A_y = +325\ \text{N}} \quad \vec{\boldsymbol{A}}_y = \boldsymbol{325\ \text{N}} \uparrow$$

Las barras en cuestión *BD* y *BE* pertenecen al nodo común *B*, como se aprecia en la figura 5.5(b). Lo ideal sería iniciar el análisis directamente por este nodo y poder hallar de una vez las fuerzas en dichas barras, aunque se tendrán cuatro fuerzas desconocidas y en cada uno de ellos solo se pueden resolver dos. Si se empieza por los puntos *D* o *E*, tampoco es posible porque serán tres las incógnitas en cada uno. Entonces, se debe iniciar por el punto *A*, en donde existen solo dos incógnitas, continuar con el nudo *D*, para terminar en el punto *B* o en el *E*.

Análisis para el nudo A

Es costumbre designar las fuerzas de las barras de acuerdo con el nudo que se esté analizando, de tal manera que para el caso del nodo *A* las fuerzas se designan como $\vec{\boldsymbol{F}}_{AB}$ o $\vec{\boldsymbol{F}}_{AD}$, o sea iniciando por la letra correspondiente al nudo, como se aprecia en la figura 5.6(a).

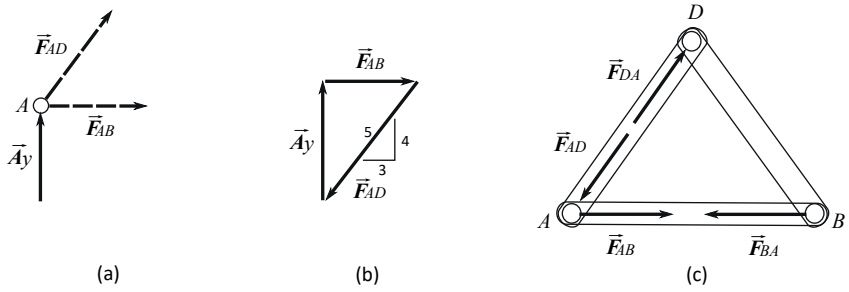


Figura 5.6

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la partícula *A*, compuesto de la reacción $\vec{\boldsymbol{A}}_y$ de 325 N y las fuerzas $\vec{\boldsymbol{F}}_{AB}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}_{AD}$, como se observa en la figura 5.6(a), las cuales representan las fuerzas en las barras *AB* y *AD*, respectivamente. Debido a que son fuerzas desconocidas, en

magnitud y sentido, se dibujan provisionalmente en forma de trazos cortos con sentidos supuestos, para corregirlos después de acuerdo con los signos que resulten.

Como en el punto *A* se tienen solamente tres fuerzas en equilibrio, es conveniente resolverlo mediante el triángulo cerrado de fuerzas, el cual es dibujado en la figura 5.6(b), en donde se muestran los sentidos correctos para $\vec{F}_{AB}$ y $\vec{F}_{AD}$. Nótese que para tener en cuenta el ángulo de inclinación de la fuerza $\vec{F}_{AD}$ se dibuja el pequeño triángulo de lados 3, 4 y 5, cuyas medidas son proporcionales a las dimensiones de la armadura, por lo que, al aplicar la ley de los senos, se tiene:

$$\frac{325\text{ N}}{4}=\frac{F_{AB}}{3}=\frac{F_{AD}}{5} \qquad \vec{F}_{AB}=\mathbf{243.75\ N}\rightarrow \quad \vec{F}_{AD}=\mathbf{406.25\ N}\swarrow$$

La fuerza $\vec{F}_{AB}$ = 243.75 N → corresponde solo a la fuerza ejercida por la barra *AB* en el extremo *A*, como se indica en la figura 5.6(c), mientras que la fuerza correspondiente al extremo *B* es igual y de sentido contrario a $\vec{F}_{AB}$ y se designa por $\vec{F}_{BA}$, de tal manera que $\vec{F}_{BA}$ = 243.75 N ←. El mismo análisis es válido para la barra *AD*, por tanto, $\vec{F}_{DA}$ = 406.25 N ↗.

Al efectuar el análisis de los sentidos de las fuerzas en el nodo *A* se deduce que la barra *AB* se encuentra a tensión porque la fuerza $\vec{F}_{AB}$ = 243.75 N → se dirige hacia afuera del nodo *A*, mientras que la barra *AD* está sometida a compresión debido a que $\vec{F}_{AD}$ = 406.25 N ↙ tiene sentido en contra del nodo *A*. La situación para ambas barras se puede apreciar en la figura 5.6(c).

Análisis para el nudo D

En la figura 5.7(a) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la partícula *D*, el cual contiene dos fuerzas desconocidas: $\vec{F}_{DB}$ y $\vec{F}_{DE}$.

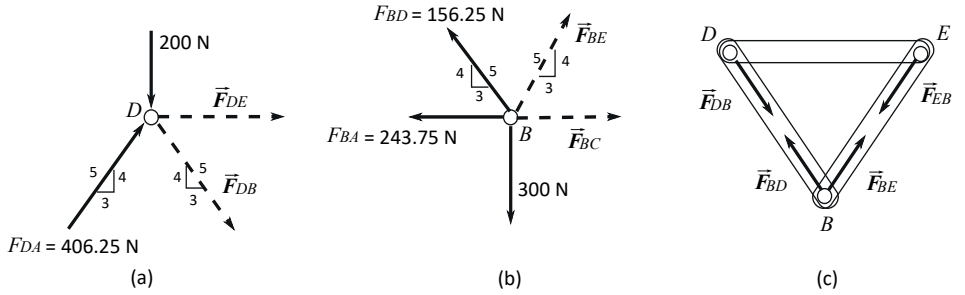


Figura 5.7

Al efectuar la sumatoria de fuerzas según los ejes x y y, se obtiene:

$$\sum F_y + \uparrow = 0:\ (4/5)(406.25\ \text{N}) - (4/5)(F_{DB}) - 200\ \text{N} = 0 \quad \boldsymbol{F_{DB} = +156.25\ \text{N}} \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{DB} = \mathbf{156.25\ N}\ \searrow$$

El signo positivo de $\vec{\boldsymbol{F}}_{DB}$ está indicando que el sentido supuesto inicialmente es el correcto, por lo tanto, $\vec{\boldsymbol{F}}_{DB}$ = 156.25 N ↘ y $\vec{\boldsymbol{F}}_{BD}$ =156.25 N ↖, y debido a que el sentido de $\vec{\boldsymbol{F}}_{DB}$ es saliendo del nodo *D*, entonces la barra *DB* está a tensión.

$$\sum F_x + \rightarrow = 0:\ (3/5)(406.25\ \text{N}) + (3/5)(F_{DB}) + F_{DE} = 0$$

Al reemplazar $\boldsymbol{F}_{DB}$ = +156.25 N y despejar $\boldsymbol{F}_{DE}$:

$$(3/5)(406.25\ \text{N}) + (3/5)(156.25\ \text{N}) + F_{DE} = 0$$

$$F_{DE} = -(3/5)(406.25\ \text{N}) - (3/5)(156.25\ \text{N}) = -337.5\ \text{N}$$

El signo negativo de $\boldsymbol{F}_{DE}$ está mostrando que el sentido correcto es contrario al supuesto inicialmente, por lo tanto, $\vec{\boldsymbol{F}}_{DE}$ = 337.5 N ← y $\vec{\boldsymbol{F}}_{ED}$ = 337.5 N→. Teniendo en cuenta que el sentido de $\vec{\boldsymbol{F}}_{DE}$ es entrando al nodo *D*, se deduce que la barra *DE* se encuentra a compresión.

Análisis para el nudo B

El diagrama de cuerpo libre de la partícula *B* está representado en la figura 5.7(b), en donde tenemos las fuerzas $\vec{\boldsymbol{F}}_{BC}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}_{BE}$ como desconocidas. Entonces, la sumatoria de fuerzas según los ejes x y y es como sigue:

$$\sum F_y + \uparrow = 0:\ \ 4/5\ (156.25\ \text{N}) + 4/5(F_{BE}) - 300\ \text{N} = 0$$

$$F_{BE} = 5/4\ (300\ \text{N} - 4/5\ (156.25\ \text{N})) = +218.75\ \text{N} \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{BE} = \mathbf{218.75\ N}\ \nearrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{EB} = \mathbf{218.75\ N}\ \swarrow$$

Al sustituir $\boldsymbol{F}_{BE}$ y despejar, se obtiene:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0:\ \ -243.75\ \text{N} - 3/5\ (156.25\ \text{N}) + 3/5\ (F_{BE}) + F_{BC} = 0$$

$$F_{BC} = 243.75\ \text{N} + 3/5\ (156.25\ \text{N}) - 3/5\ (218.75\ \text{N}) = +206.25\ \text{N}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{BC} = \mathbf{206.25\ N}\ \rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{CB} = \mathbf{206.25\ N}\ \leftarrow$$

Dado que tanto $\vec{\boldsymbol{F}}_{BE}$ como $\vec{\boldsymbol{F}}_{BC}$ salen del nodo *B*, se concluye que las barras *BE* y *BC* se encuentran a tensión.

5.6 Método de las secciones

A diferencia del método de los nudos, para hallar las fuerzas en las barras de una armadura, el método de las secciones es más específico, en el sentido de que no es necesario

efectuar un recorrido por varias barras hasta llegar a la solicitada, sino que el cálculo se realiza directamente sobre esta.

El método consiste en dividir o seccionar la armadura en dos partes, al efectuar cortes generalmente en tres barras, incluyendo la requerida. Se considera, como en el método de los nudos que, al estar toda la armadura en equilibrio, también se encuentra en equilibrio cada una de las secciones o partes, en las cuales se divide.

Una vez seccionada la armadura, se escoge una de las dos partes, la más sencilla o conveniente para su análisis estático, y se elabora el respectivo diagrama de cuerpo libre al considerar las fuerzas en las barras cortadas como incógnitas y tomarlas ya no como fuerzas internas, pertenecientes a la sección de la armadura elegida, sino como externas a esta, para formar parte de las fuerzas aplicadas y utilizar una ecuación de equilibrio adecuada para resolver la fuerza incógnita de la barra deseada, o sea una ecuación en donde las otras dos sean eliminadas.

Se debe tener en cuenta que previamente al seccionamiento es necesario realizar un diagrama de cuerpo libre de la armadura completa, con el fin de determinar las reacciones en los apoyos. Lo anterior se ilustrará en los dos ejemplos siguientes.

5.6.1 Ejemplo 5.2

En relación con la armadura y cargas mostradas en la figura 5.8, calcular las fuerzas en las barras *DE*, *DK* y *JK* por el método de las secciones y definir si se encuentran a tensión o a compresión.

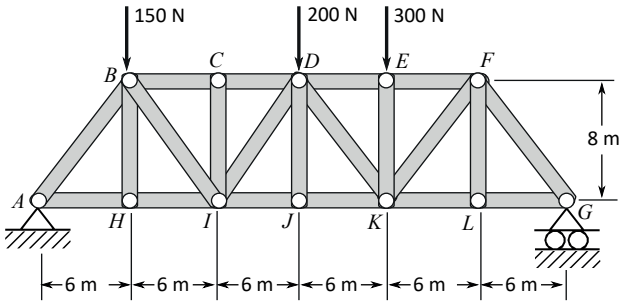


Figura 5.8

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la armadura, el cual se ilustra en la figura 5.9, con el fin de hallar las reacciones en los apoyos *A* y *G*, así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: \ \vec{A}_x = 0$$

$$\sum M_A + \curvearrowright = 0: \ (150 \text{ N})(6 \text{ m}) + (200 \text{ N})(18 \text{ m}) + (300 \text{ N})(24 \text{ m}) - (36 \text{ m})(G) = 0$$

$$\boldsymbol{G = +325 \text{ N} \quad \vec{G} = 325 \text{ N} \uparrow}$$

$$\sum F_y + \uparrow = 0: \ A_y - 150 \text{ N} - 200 \text{ N} - 300 \text{ N} + G = 0 \quad \boldsymbol{A_y = +325 \text{ N}} \quad \boldsymbol{\vec{A}_y = 325 \text{ N} \uparrow}$$

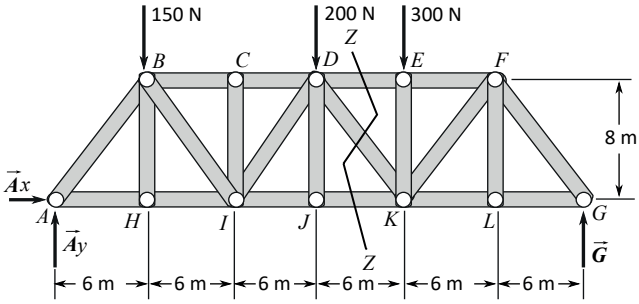


Figura 5.9

Dado que se trata de encontrar las fuerzas en las barras *DE*, *DK* y *JK*, se efectúa el corte *ZZ*, como se muestra en la figura 5.9, por lo cual la armadura se ha dividido en dos partes; aunque para el análisis de equilibrio es necesario escoger una de las dos, y en este caso resulta conveniente tomar la del lado derecho, por ser más sencilla, en tanto contiene menos fuerzas.

Se realiza el diagrama de cuerpo libre, indicado en la figura 5.10, en donde se muestra que las barras cortadas se han reemplazado por sus correspondientes fuerzas $\vec{F}_{ED}$, $\vec{F}_{KD}$ y $\vec{F}_{KJ}$, las cuales se dibujan con trazos discontinuos para indicar que sus sentidos son supuestos, como si se encontraran a tensión, o sea al salir de sus respectivos nodos, para ser corregidas posteriormente de acuerdo con el signo que resulte para cada una de ellas.

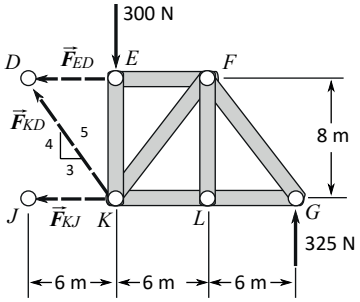


Figura 5.10

Nótese que las mencionadas fuerzas $\vec{F}_{ED}$, $\vec{F}_{KD}$ y $\vec{F}_{KJ}$ han pasado de ser internas para convertirse en fuerzas externas, en relación con la armadura seccionada, definida por los nodos *EFKLG*, por lo tanto, esta se considera en equilibrio sometida a cinco fuerzas externas: las de 300 N y 325 N, más las fuerzas $\vec{F}_{ED}$, $\vec{F}_{KD}$ y $\vec{F}_{KJ}$ como se indica en la figura 5.10.

Debido a que se requiere hallar la fuerza en la barra *DK*, representada por $\vec{F}_{KD}$, y se tienen dos incógnitas más, pertenecientes a $\vec{F}_{ED}$ y $\vec{F}_{KJ}$, es necesario utilizar una ecuación en donde se eliminen estas. Como dichas fuerzas son horizontales, o sea que no tienen componentes en el eje y, se toma sumatoria de fuerzas en este eje, así:

$$\sum F_y + \uparrow = 0\text{: } (4/5)(F_{KD}) - 300\text{ N} + 325\text{ N} = 0 \quad \boldsymbol{F_{KD} = -31,25\text{ N}} \quad \boldsymbol{\vec{F}_{KD} = 31.25\text{ N}\searrow}$$

Dado que la fuerza $\vec{F}_{KD}$ entra al nodo *K*, se concluye que la barra *DK* se encuentra a compresión.

Para determinar ahora la fuerza en la barra *DE*, o $\vec{F}_{ED}$, se toma sumatoria de momentos con respecto al punto *K*, por lo cual se anulan las incógnitas $\vec{F}_{KD}$ y $\vec{F}_{KJ}$, así:

$$\sum M_K + \circlearrowleft = 0\text{: } (325\text{ N})(12\text{ m}) + (8\text{ m})(F_{ED}) = 0 \quad \boldsymbol{F_{ED} = -487.5\text{ N}} \quad \boldsymbol{\vec{F}_{ED} = 487.5\text{ N}\rightarrow}$$

Se concluye, de acuerdo con la corrección del signo, que la fuerza $\vec{F}_{ED}$ entra al respectivo nodo *E*, por lo tanto, la barra *DE* también se encuentra a compresión.

Por último, la fuerza en la barra *JK*, designada por $\vec{F}_{KJ}$, se calcula al tomar sumatoria de momentos con respecto al punto *D*, para eliminar las restantes incógnitas $\vec{F}_{ED}$ y $\vec{F}_{KD}$, dada por:

$$\sum M_D + \circlearrowright = 0\text{: } (300\text{ N})(6\text{ m}) + (8\text{ m})(F_{KJ}) - (325\text{ N})(18\text{ m}) = 0$$

$$\boldsymbol{F_{KJ} = +506.25\text{ N}} \quad \boldsymbol{\vec{F}_{KJ} = 506.25\text{ N}\leftarrow}$$

Debido a que el signo para la fuerza $\vec{F}_{KJ}$ resultó positivo, o sea que el sentido supuesto inicialmente fue correcto, la barra *JK* se encuentra a tensión.

5.6.2 Ejemplo 5.3

Teniendo en cuenta la armadura tipo Pratt para techo mostrada en la figura 5.11, determinar las fuerzas en las barras *BC*, *FC* y *FG* por el método de las secciones y especificar si están a tensión o a compresión. Identificar, además, las barras de fuerzas conocidas y clasificarlas de acuerdo con los casos contemplados en la sección 5.4.

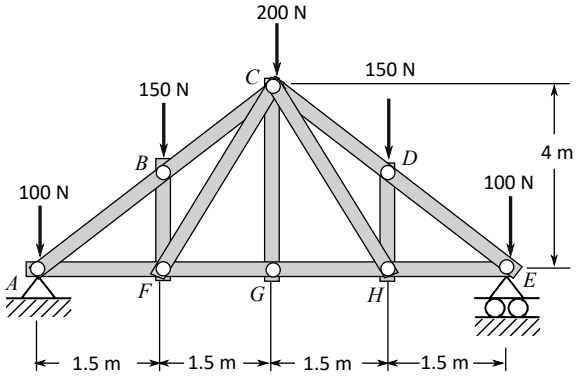


Figura 5.11

Solución

Se elabora el diagrama de cuerpo libre como se ilustra en la figura 5.12 y se toman sumatorias de fuerzas y de momentos, para determinar las reacciones en los apoyos, así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: \; A_x = 0$$

$$\sum M_A + \curvearrowright = 0: \; (150\text{ N})(1.5\text{ m}) + (200\text{ N})(3\text{ m}) + (150\text{ N})(4.5\text{ m}) + (100\text{ N})(6\text{ m}) - (E)(6\text{ m}) = 0$$

$$\boldsymbol{E = +350\text{ N}} \quad \vec{\boldsymbol{E}} = \mathbf{350\text{ N}} \uparrow$$

$$\sum F_y + \uparrow = 0: \; A_y - 100\text{ N} - 150\text{ N} - 200\text{ N} - 150\text{ N} - 100\text{ N} + 350\text{ N} = 0$$

$$\boldsymbol{A_y = +350\text{ N}} \quad \vec{\boldsymbol{A}}_y = \mathbf{350\text{ N}} \uparrow$$

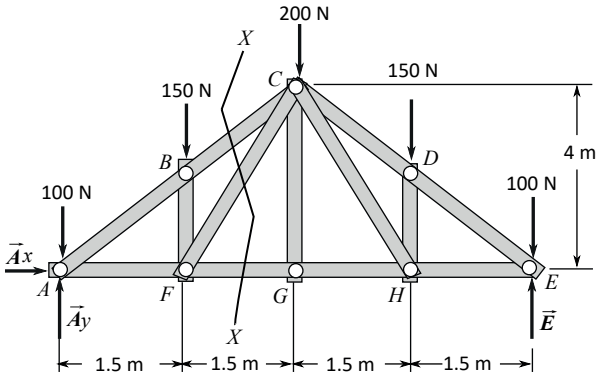


Figura 5.12

Se realiza un corte en la armadura denominado *XX*, como se indica en la figura 5.12, se escoge por conveniencia la parte izquierda, en este caso, y se dibuja el correspondiente diagrama de cuerpo libre, como se muestra en la figura 5.13, en donde se observa que las barras cortadas se representan mediante las fuerzas $\vec{F}_{BC}$, $\vec{F}_{FC}$ y $\vec{F}_{FG}$, las cuales se dibujan con trazos discontinuos porque sus sentidos son supuestos, para barras a tensión, o sea saliendo del respectivo nodo, para corregirlas después de acuerdo con el signo que resulte para cada una de ellas.

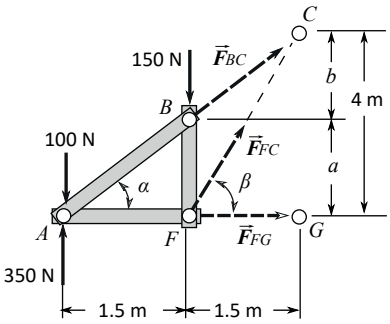


Figura 5.13

Con base en la figura 5.13, se evidencia el hecho de que, para determinar cada una de las fuerzas $\vec{F}_{BC}$, $\vec{F}_{FC}$ o $\vec{F}_{FG}$, es necesario realizar sumatoria de momentos con respecto a un punto donde las líneas de acción de las dos restantes se corten, con el fin de que sus momentos se anulen y se tenga una sola incógnita.

O sea, para el caso de calcular la fuerza $\vec{F}_{FG}$, se toma la suma de momentos con respecto al punto *C*, siendo este el punto de corte de las líneas de acción de $\vec{F}_{BC}$ y $\vec{F}_{FC}$, dando como resultado a $\vec{F}_{FG}$ como incógnita única, así:

$$\sum M_C + \circlearrowright = 0:\ (350\ \text{N})(3\ \text{m}) - (100\ \text{N})(3\ \text{m}) - (150\ \text{N})(1.5\ \text{m}) - (F_{FG})(4\ \text{m}) = 0$$

$$\boldsymbol{F_{FG} = +131.25\ \text{N} \quad \vec{F}_{FG} = 131.25\ \text{N} \rightarrow}$$

La fuerza $\vec{F}_{FG}$ sale del nodo *F*, por tanto, la barra *FG* se encuentra a tensión.

De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta la figura 5.13, se deduce que para hallar la fuerza $\vec{F}_{FC}$ se elige el punto *A*, como referencia para realizar momentos, y que para calcular $\vec{F}_{BC}$ se escoge el punto *F*, lo cual se hará a continuación. Se definen previamente los ángulos de inclinación α y β, correspondientes a las barras *BC* y *FC*, respectivamente, así:

$$tan\,\alpha = \left(\frac{4\ \text{m}}{3\ \text{m}}\right) \quad \alpha = tan^{-1}\left(\frac{4\ \text{m}}{3\ \text{m}}\right) = 53.13°$$

$$tan\,\beta = \left(\frac{4\ \text{m}}{1.5\ \text{m}}\right) \quad \beta = tan^{-1}\left(\frac{4\ \text{m}}{1.5\ \text{m}}\right) = 69.44°$$

De acuerdo con la figura 5.14(a), al realizar la suma de momentos con respecto al punto A, para definir la fuerza $\vec{F}_{FC}$ es necesario descomponer esta según los ejes x y y, como se indica, con el fin de aplicar el principio de los momentos, visto en la sección 3.12, y en su lugar tomar sumatoria de los momentos de las componentes, así:

$$\sum M_A + \curvearrowright = 0:\ (150\ \text{N})(1.5\ \text{m}) - (F_{FC}\ sen\ \beta\ )(1.5\ \text{m}) = 0$$

Al reemplazar $sen\ \beta = sen\ 69.44° = 0.936$ y despejar F_{FC}:

$$F_{FC} = +150\ \text{N}/0.936 = +160.25\ \text{N} \quad \vec{F}_{FC} = \mathbf{160.25\ N}\ \nearrow$$

La fuerza $\vec{F}_{FC}$ sale del nodo F, por tanto, la barra FC está a tensión.

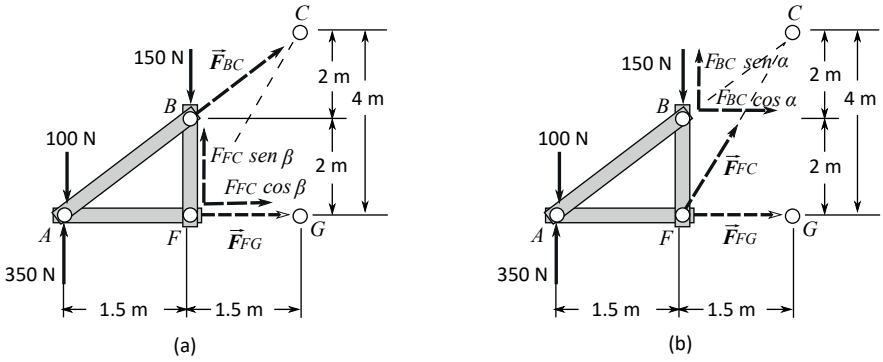


Figura 5.14

Se calcula ahora la fuerza $\vec{F}_{BC}$ al sumar momentos con respecto al punto F, por lo tanto, se descompone esta según los ejes x y y, como se indica en la figura 5.14(b), para aplicar también el principio de los momentos, así :

$$\sum M_F + \curvearrowright = 0:\ (350\ \text{N})(1.5\ \text{m}) - (100\ \text{N})(1.5\ \text{m}) + (F_{BC}\ cos\ \alpha)(2\ \text{m}) = 0$$

Al reemplazar $cos\ \alpha = cos\ (53.13°) = 0.6$ y despejar $\boldsymbol{F}_{BC}$:

$$F_{BC} = -312.5\ \text{N} \quad \vec{F}_{BC} = \mathbf{312.5\ N}\ \swarrow$$

La fuerza $\vec{F}_{BC}$ entra al nodo B, por tanto, la barra BC se encuentra a compresión.

En cuanto a la identificación de las barras de fuerzas conocidas, lo cual solicita además el enunciado del problema, conforme a los casos vistos en la sección 5.4, teniendo en cuenta la figura 5.15, la cual es copia de la figura 5.11, se puede decir que los nodos B y D se asimilan al caso 3, y en consecuencia, en el nodo B, $\vec{F}_{BA}$ es igual y de sentido contrario a $\vec{F}_{BC}$ y, además, $\vec{F}_{BF}$ es igual y contraria a la fuerza de 150 N; asimismo, en el nodo D, $\vec{F}_{DC}$ es igual y opuesta a $\vec{F}_{DE}$, como también $\vec{F}_{DH}$ es igual e invertida a la fuerza de 150 N.

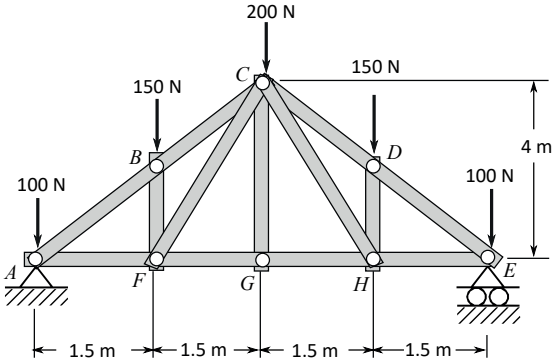
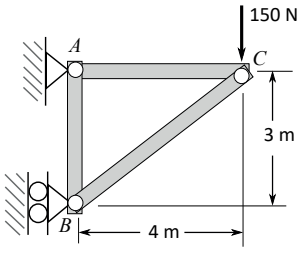


Figura 5.15

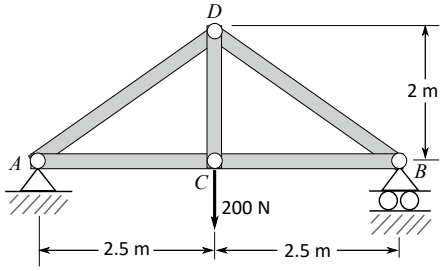
En cuanto al nodo *G*, se relaciona con el caso 4, por lo tanto, $\vec{F}_{GC} = 0$ y las fuerzas $\vec{F}_{GH}$ y $\vec{F}_{GF}$ son iguales y opuestas.

5.7 Problemas propuestos

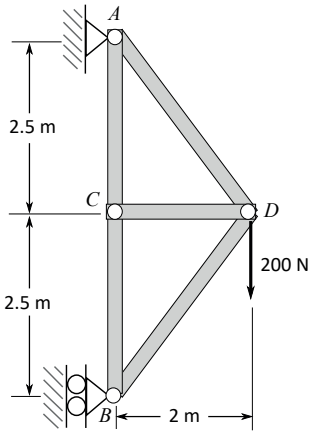
Problemas 5.1, 5.2 y 5.3. Para cada una de las armaduras cargadas como se muestran en la figura, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *B* y las fuerzas en cada una de las barras por el método de los nudos y determinar si se encuentran a tensión o a compresión.



Problema 5.1

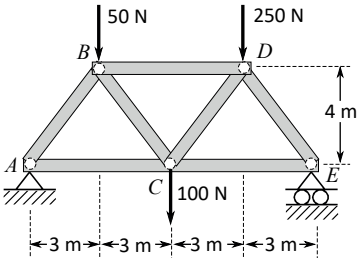


Problema 5.2

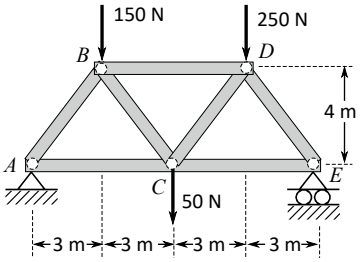


Problema 5.3

Problemas 5.4 y 5.5. Para cada una de las armaduras cargadas como se indica en la figura, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *E* y las fuerzas en las barras *BD*, *BC* y *AC* por el método de los nudos y determinar si están a tensión o a compresión.

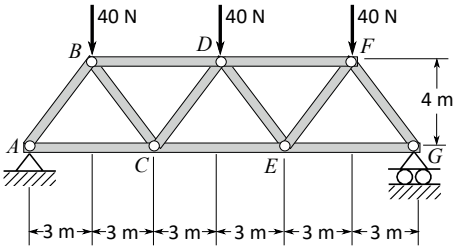


Problema 5.4

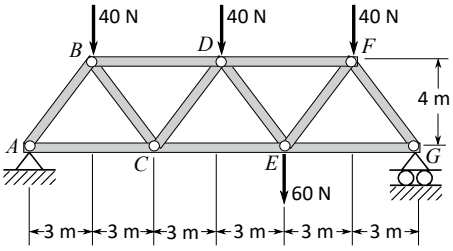


Problema 5.5

Problemas 5.6 y 5.7. En relación con las armaduras y cargas indicadas en la figura, hallar las fuerzas en las barras *BC*, *CD*, *DE* y *EF* y determinar si se encuentran a tensión o a compresión.

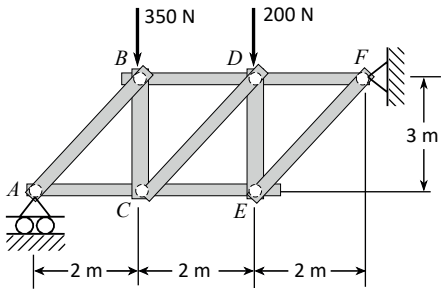


Problema 5.6

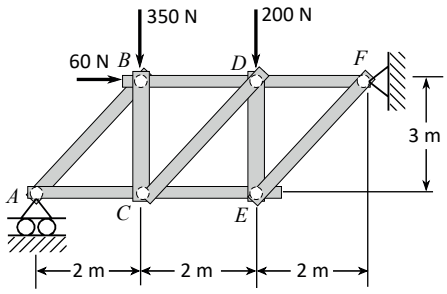


Problema 5.7

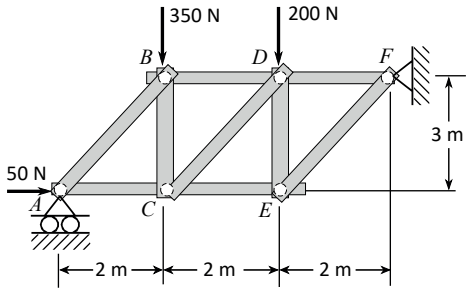
Problemas 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11. De acuerdo con las armaduras y cargas que se muestran en la figura, hallar las reacciones en los puntos *A* y *F* y las fuerzas en las barras *BD*, *CD* y *CE* por el método de las secciones y determinar para cada barra si se encuentra a tensión o a compresión.



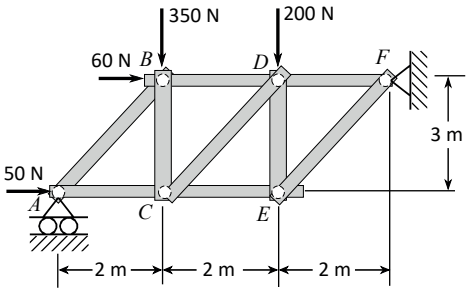
Problema 5.8



Problema 5.9

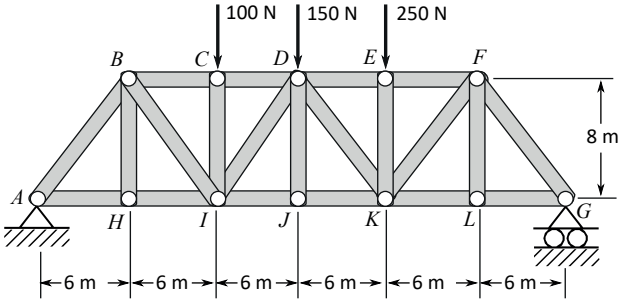


Problema 5.10



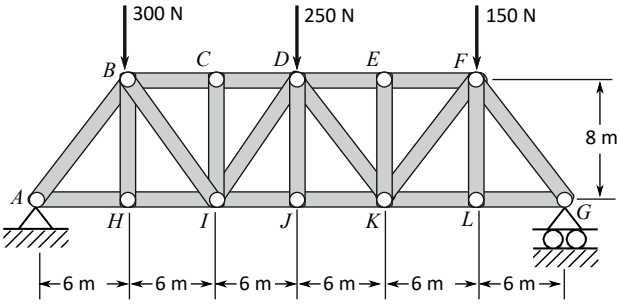
Problema 5.11

Problema 5.12. Para la armadura cargada como se indica en la figura, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *G* y las fuerzas en las barras *DE*, *DK* y *JK* por el método de las secciones y determinar si están a tensión o a compresión.



Problema 5.12

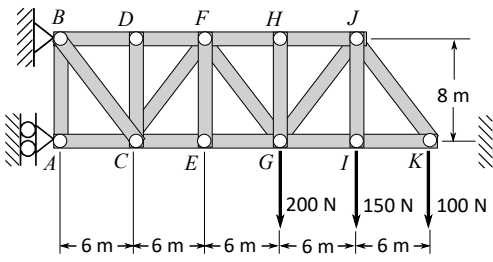
Problema 5.13. Para la armadura cargada como se indica en la figura, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *G* y las fuerzas en las barras *CD*, *ID* e *IJ* por el método de las secciones y determinar si están a tensión o a compresión.



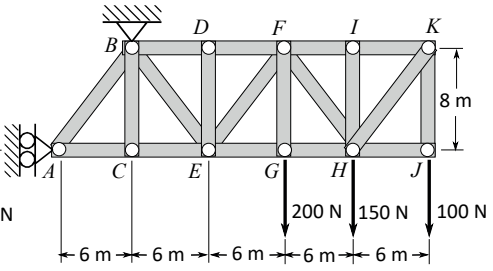
Problema 5.13

Problema 5.14. Para la armadura y las cargas mostradas en la figura, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *B* y las fuerzas en las barras *EG*, *FG* y *FH* por el método de las secciones y determinar si se encuentran a tensión o a compresión.

Problema 5.15. Para la armadura y las cargas mostradas en la figura, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *B* y las fuerzas en las barras *DF*, *EF* y *EG* por el método de las secciones y determinar si se encuentran a tensión o a compresión.



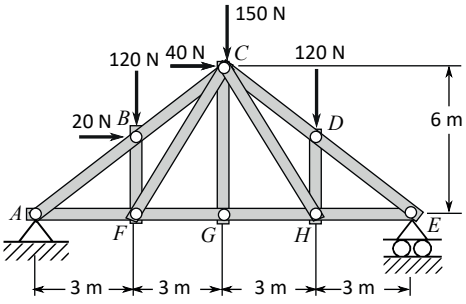
Problema 5.14



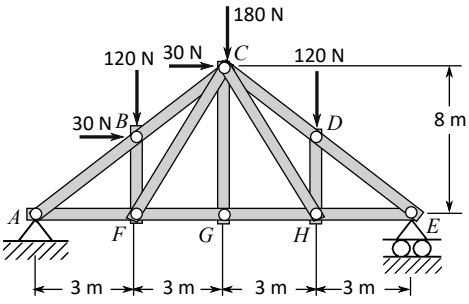
Problema 5.15

Problema 5.16. Para la armadura de techo tipo Pratt mostrada en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *E* y las fuerzas en las barras *BC*, *FC* y *FG* por el método de las secciones y definir si están a tensión o compresión.

Problema 5.17. Para la armadura de techo tipo Pratt mostrada en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *E* y las fuerzas en las barras *CD*, *CH* y *GH* por el método de las secciones y definir si están a tensión o compresión.



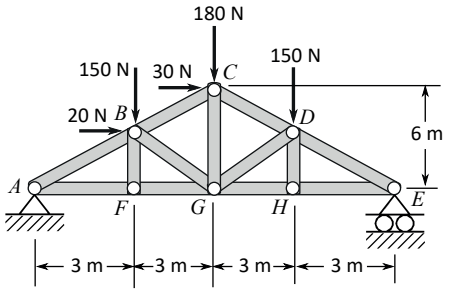
Problema 5.16



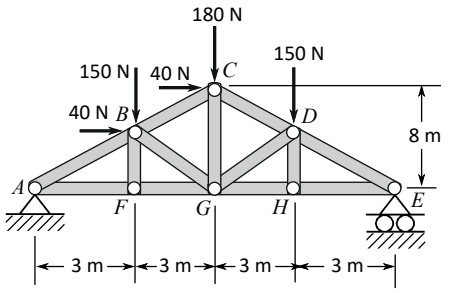
Problema 5.17

Problema 5.18. Para la armadura de techo tipo Howe mostrada en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *E* y las fuerzas en las barras *BC*, *BG*, *FG* y *CG* por el método de las secciones y definir si están a tensión o compresión.

Problema 5.19. Para la armadura de techo tipo Howe mostrada en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *E* y las fuerzas en las barras *CD*, *GD*, *GH* y *CG* por el método de las secciones y definir si están a tensión o compresión.



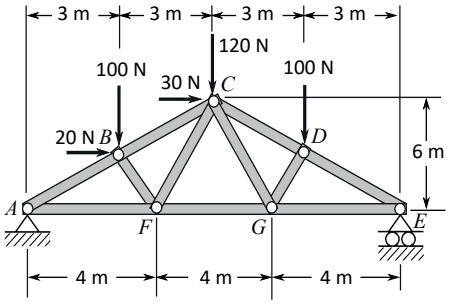
Problema 5.18



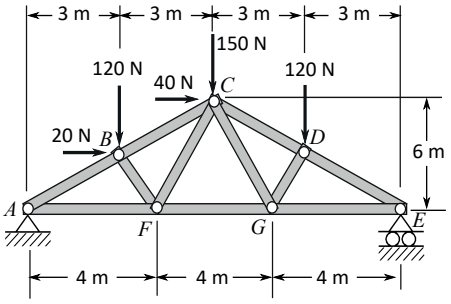
Problema 5.19

Problema 5.20. Para la armadura tipo Fink mostrada en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *E* y las fuerzas en las barras *BC*, *FC* y *FG* por el método de las secciones y definir si están a tensión o compresión.

Problema 5.21. Para la armadura tipo Fink mostrada en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *E* y las fuerzas en las barras *CD*, *CG* y *FG* por el método de las secciones y definir si están a tensión o compresión.

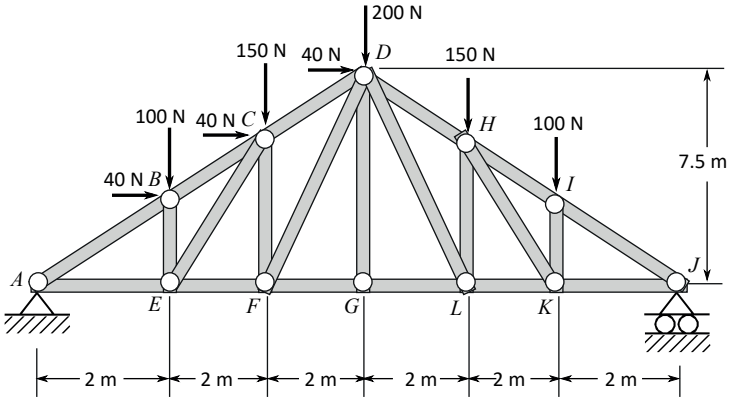


Problema 5.20



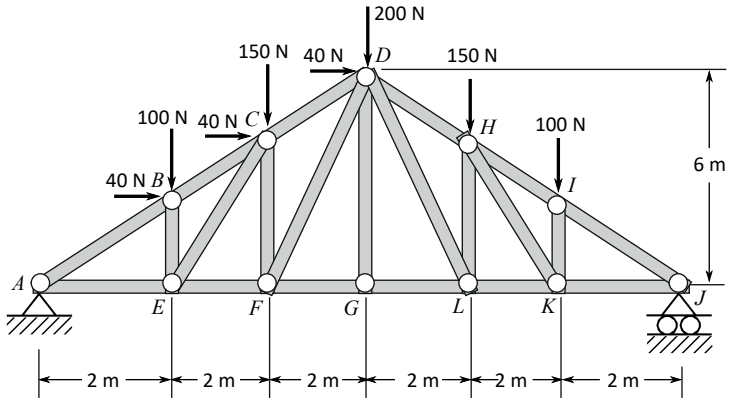
Problema 5.21

Problema 5.22. Para la armadura tipo Pratt según la figura y cargada como se muestra, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *J* y las fuerzas en las barras *CD*, *FD* y *FG* y determinar si están a tensión o compresión.



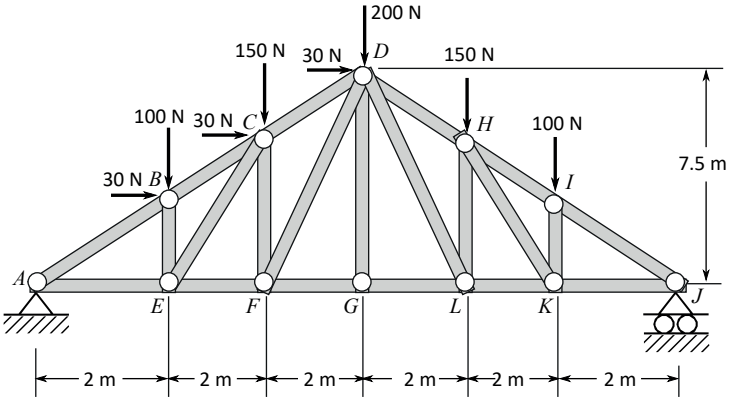
Problema 5.22

Problema 5.23. Para la armadura tipo Pratt según la figura y cargada como se muestra, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *J* y las fuerzas en las barras *HI*, *HK* y *LK* y determinar si están a tensión o compresión.



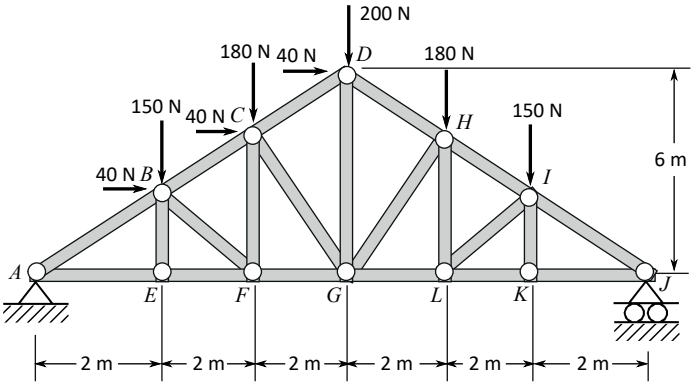
Problema 5.23

Problema 5.24. Para la armadura tipo Pratt según la figura y cargada como se muestra, hallar las reacciones en los apoyos *A* y *J* y las fuerzas en las barras *BC*, *EC* y *EF* y determinar si están a tensión o compresión.



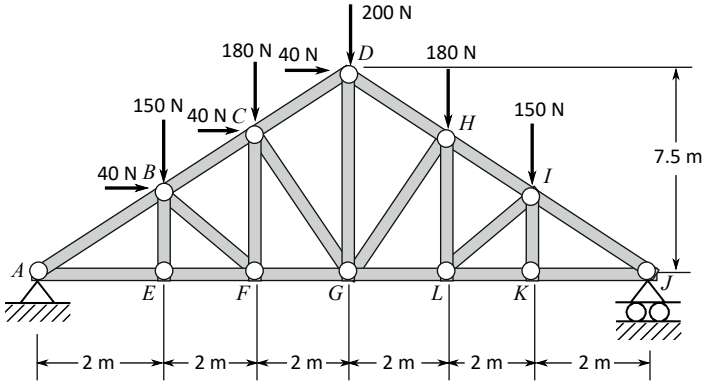
Problema 5.24

Problema 5.25. De acuerdo con la armadura tipo Howe mostrada y cargada como se indica en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *J* y las fuerzas en las barras *BC*, *FC* y *FG* y definir si están a tensión o compresión.



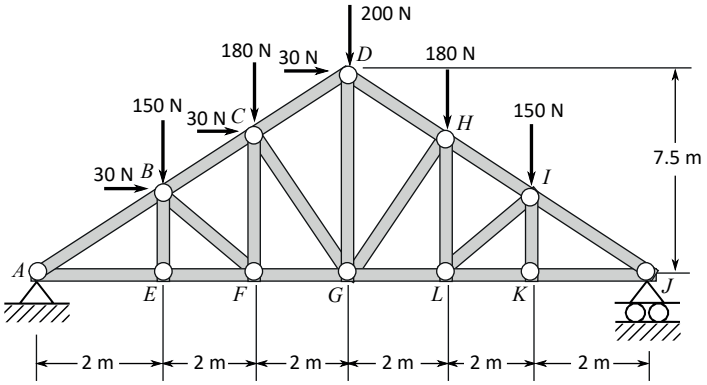
Problema 5.25

Problema 5.26. De acuerdo con la armadura tipo Howe mostrada y cargada como se indica en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *J* y las fuerzas en las barras *HI*, *LI* y *LK* y definir si están a tensión o compresión.



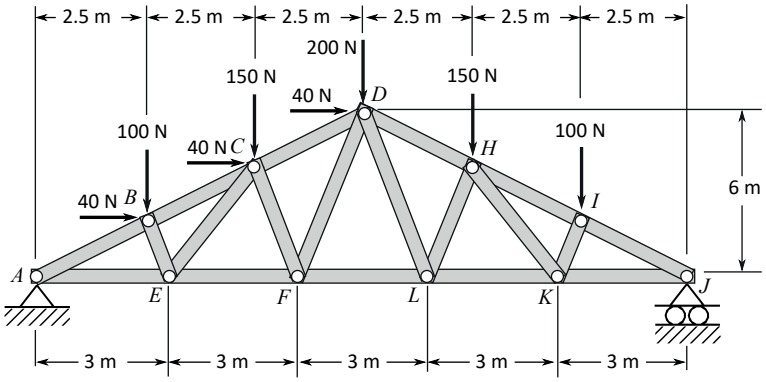
Problema 5.26

Problema 5.27. De acuerdo con la armadura tipo Howe mostrada y cargada como se indica en la figura, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *J* y las fuerzas en las barras *CD*, *CG* y *FG* y definir si están a tensión o compresión.



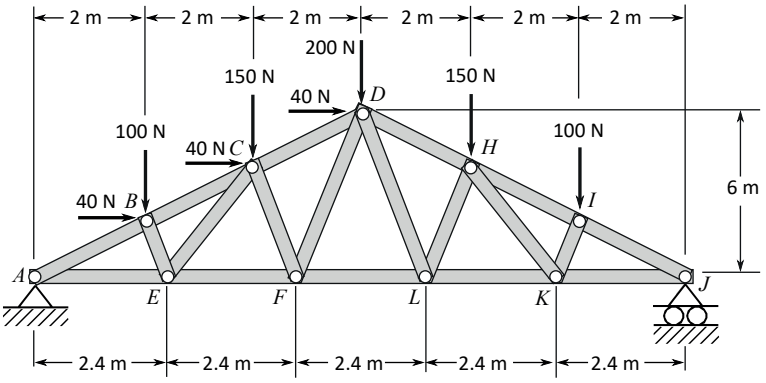
Problema 5.27

Problema 5.28. De acuerdo con la armadura tipo Fink mostrada y cargada como se indica en la figura, hallar las fuerzas en las barras *CD*, *FD* y *FL* y definir si están a tensión o compresión.



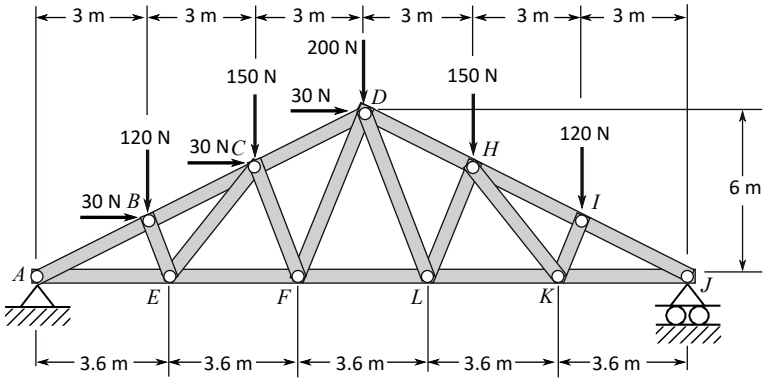
Problema 5.28

Problema 5.29. De acuerdo con la armadura tipo Fink mostrada y cargada como se indica en la figura, hallar las fuerzas en las barras *HI*, *HK* y *LK* y definir si están a tensión o compresión.



Problema 5.29

Problema 5.30. De acuerdo con la armadura tipo Fink mostrada y cargada como se indica en la figura, hallar las fuerzas en las barras *BC*, *EC* y *EF* y definir si están a tensión o compresión.



Problema 5.30

Centros de gravedad, centroides y fuerzas distribuidas

6

Objetivos del capítulo

- Analizar el peso como una fuerza equivalente a un sistema de fuerzas paralelas y el centro de gravedad como su punto de aplicación.
- Estudiar el procedimiento de cálculo del centroide de un área, por similitud con el centro de gravedad de un cuerpo.
- Determinar el centroide de áreas compuestas a partir de centroides de áreas conocidas.
- Estudiar las fuerzas distribuidas en vigas y la forma de ser reemplazadas por fuerzas equivalentes.

6.1 Introducción

El término *centro de gravedad,* bien sea de una estructura, de una máquina o de un cuerpo en general, es un parámetro que se usa a menudo en ingeniería como referencia para establecer medidas relacionadas con el peso y la forma como se distribuye, con el fin de lograr un mejor estado de equilibrio, sea estático o dinámico. En el diseño de autos de carrera se tiene en cuenta para dividir el peso del vehículo de tal manera que su centro de gravedad se encuentre lo más bajo posible, y en el centro de la carrocería, con el fin de disminuir las posibilidades de volcado en curvas a altas velocidades. Las mismas consideraciones son válidas en la fabricación del resto de vehículos, incluidos los de carga y de pasajeros.

De la torre inclinada de Pisa se afirma que no se ha volcado porque fue construida de tal manera que los pisos de abajo fueran los más pesados, lo cual quiere decir que su centro de gravedad es bajo, y además, porque la vertical que pasa por el centro de gravedad no se ha salido del área de su base.

Aunque el peso, en realidad, se halla distribuido en cada una de las partículas que conforman un cuerpo, el centro de gravedad se considera como el punto donde se encuentra concentrado, y se localiza cerca de la zona en la que se halla la mayor parte del peso total. Si se logra suspender un cuerpo del centro de gravedad, quedará en perfecto equilibrio en cualquier posición.

En un aeroplano la posición del centro de gravedad, respecto de la ubicación del denominado centro de presiones, juega un papel importante en su maniobrabilidad. Mientras que en el centro de gravedad se considera aplicado el peso del avión, dirigido verticalmente hacia abajo, en el centro de presiones teóricamente se concentra toda la presión del aire que actúa en forma de una fuerza de sustentación hacia arriba, equilibrando el peso del aeroplano durante el vuelo.

Para mantener el avión en forma estable durante la operación de vuelo, es necesario manipular los controles de las alas de tal manera que el centro de presiones quede en la misma línea vertical que el centro de gravedad, así la fuerza de sustentación $\vec{F}$ queda alineada con el peso $\vec{W}$, como se muestra en la figura 6.1(a), y no se genera ningún par de fuerzas.

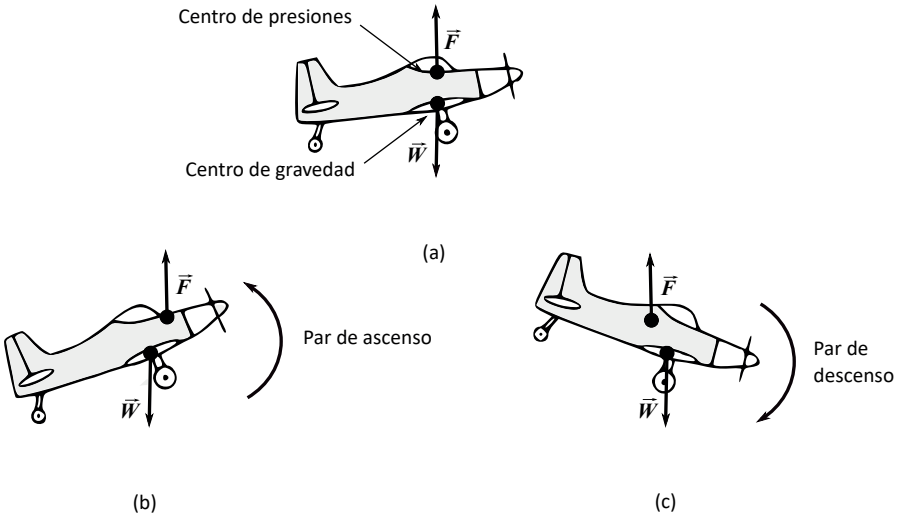


Figura 6.1

En cambio, si se desea colocar el avión en posición de elevación, es necesario generar un par de ascenso entre la fuerza de sustentación $\vec{F}$ y el peso $\overrightarrow{W}$, lo cual se logra al manipular las alas de tal forma que el centro de presiones quede por delante del centro de gravedad, como se indica en la figura 6.1(b). Por otro lado, si se requiere descender, entonces los controles se manejan para que el centro de presiones se ubique por detrás del centro de gravedad y se produzca un par de descenso, como se ilustra en la figura 6.1(c).

6.2 El peso como una fuerza equivalente

El *centro de gravedad G de un cuerpo* se define como el punto donde se considera se encuentra aplicado su peso $\overrightarrow{W}$, tomado como si fuera una fuerza concentrada. El peso $\overrightarrow{W}$, en vez de ser una fuerza concentrada, caracterizada por estar aplicada en un solo punto, más bien está compuesto por un sinnúmero de diminutas fuerzas distribuidas en todas las partículas que conforman el cuerpo, las cuales son originadas por la acción gravitacional de la Tierra. Por tal razón, las líneas de acción de dichas fuerzas se encuentran dirigidas hacia el centro de la Tierra, aunque para fines de cálculos se toman como si fueran paralelas.

De acuerdo con lo anterior, un cuerpo se considera que está formado por un sistema de diminutas fuerzas paralelas cuya resultante es el peso $\overrightarrow{W}$ y para el cual la posición de su punto de aplicación, tomado como si fuera una fuerza concentrada, resulta ser el centro de gravedad *G* del cuerpo. De tal manera que para definir la posición del centro de gravedad *G* es necesario calcular el punto de aplicación de la fuerza resultante $\overrightarrow{W}$, equivalente a la de un conjunto de diminutas fuerzas paralelas.

6.3 Punto de aplicación de la resultante de varias fuerzas paralelas

Considere varias fuerzas paralelas verticales de magnitudes F_1, F_2 y F_3, que actúan respectivamente en los puntos definidos por las distancias x_1, x_2 y x_3, de una viga en el plano *xz*, como se muestra en la figura 6.2(a), las cuales se desea reemplazar por una sola fuerza de magnitud *R*, aplicada a una distancia *x*, como se indica en la figura 6.2(b).

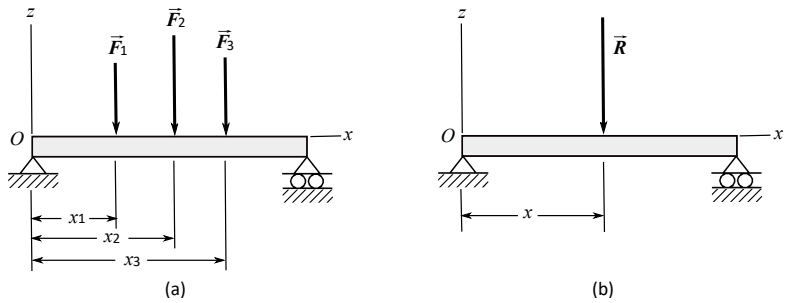


Figura 6.2

Para cumplir lo anterior, los dos sistemas mostrados en las figuras 6.2(a) y 6.2(b) deben ser equivalentes, por lo que, de acuerdo con lo tratado en la sección 3.21, es necesario igualar las fuerzas para determinar R y los momentos con respecto a un punto de referencia O para definir el valor de x, como se procede a continuación:

$$\sum F_z:\ R = F_1 + F_2 + F_3$$
$$\sum M_o:\ xR = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3$$
$$x = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

El valor de x dado por la ecuación anterior define la posición correspondiente a la resultante R, del sistema de fuerzas paralelas, conforme a la figura 6.2(b).

Si las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ no actúan sobre una viga, sino sobre una placa plana, como se muestra en la figura 6.3(a), aplicadas respectivamente en los puntos de coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), entonces para calcular las coordenadas (x, y) correspondientes a la posición de la resultante $\vec{R}$ se divide la placa en dos planos: uno en el plano zx y el otro en el plano zy, como se observa en las figuras 6.3(a) y 6.3(b).

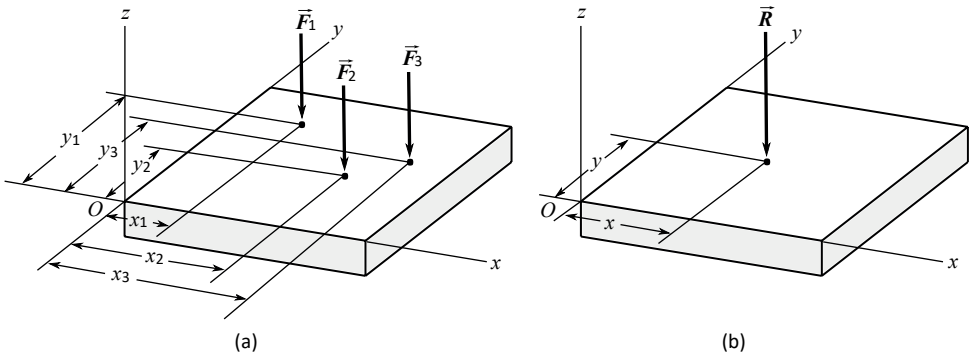


Figura 6.3

La resultante R se encuentra al efectuar la suma de fuerzas en el eje z, así:

$$\sum F_z:\ R = F_1 + F_2 + F_3 \tag{6.1}$$

El valor de x se halla al despejar de la sumatoria de momentos con respecto al eje y:

$$\sum M_y:\ xR = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3$$
$$x = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3}{F_1 + F_2 + F_3} \tag{6.2}$$

Se despeja el valor de y de la suma de momentos con respecto al eje x:

$$\sum M_x:\ yR = y_1F_1 + yF_2 + y_3F_3$$
$$y = \frac{y_1F_1 + yF_2 + y_3F_3}{F_1 + F_2 + F_3} \tag{6.3}$$

Las ecuaciones 6.2 y 6.3 definen las coordenadas (x, y) correspondientes a la posición de la resultante $\vec{R}$, del sistema de fuerzas paralelas, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, que actúan sobre una placa plana, de acuerdo con las figuras 6.3(a) y 6.3(b). Nótese que las expresiones 6.2 y 6.3 son similares a las relaciones 3.25, las cuales definen la posición de una fuerza equivalente a un sistema de fuerzas paralelas.

6.4 Centro de gravedad de un cuerpo

Para calcular el centro de gravedad G correspondiente al peso $\overrightarrow{W}$, se divide el cuerpo en n partículas de peso $\Delta\overrightarrow{W}$ cada una, como se indica en la figura 6.4(a), a las cuales se les asignan sus respectivas coordenadas en un sistema xyz, de tal manera que a la partícula 1 le corresponden las coordenadas (x_1, y_1, z_1) y el peso $\Delta\overrightarrow{W}_1$, a la partícula 2, las coordenadas (x_2, y_2, z_2) y el peso $\Delta\overrightarrow{W}_2$, hasta llegar a la partícula n, la cual tiene las coordenadas (x_n, y_n, z_n) y el peso $\Delta\overrightarrow{W}_n$.

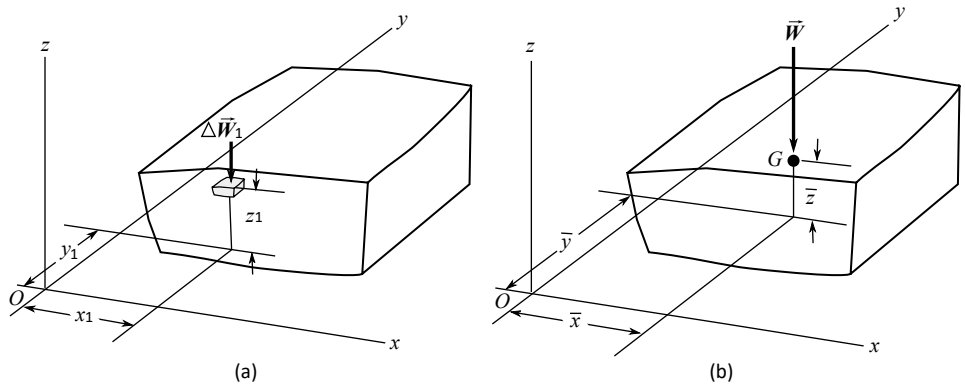


Figura 6.4

Considerando que el cuerpo está compuesto de n diminutas fuerzas paralelas al eje z, el peso total W es igual a la suma de todas ellas, así:

$$\sum \mathrm{F}_z:\ W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots + \Delta W_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i$$

Al realizar la sumatoria de momentos con respecto al eje y:

$$\sum \mathrm{M}_y\colon\ \bar{x}\,W = x_1\Delta W_1 + x_2\Delta W_2 + \ldots + x_n\Delta W_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta W_i$$

Efectuando, además, la sumatoria de momentos con respecto al eje x:

$$\sum \mathrm{M}_x\colon\ \bar{y}\,W = y_1\Delta W_1 + y_2\Delta W_2 + \ldots + y_n\Delta W_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta W_i$$

Si se gira el cuerpo de tal manera que el eje y quede en dirección vertical y se toma sumatoria de momentos con respecto al eje x, se determina la coordenada z así:

$$\sum \mathrm{M}_x\colon\ \bar{z}\,W = z_1\Delta W_1 + z_2\Delta W_2 + \ldots + z_n\Delta W_n = \sum_{i=1}^{n} z_i\Delta W_i$$

Al aumentar el número n de pequeñas partículas haciéndolas infinitamente pequeñas, en el límite las sumatorias anteriores tienden a las siguientes integrales:

$$W = \int dW \qquad \bar{x}\,W = \int x dW \qquad \bar{y}\,W = \int y dW \qquad \bar{z}\,W = \int z dW$$

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ corresponden a la posición del centro de gravedad G del cuerpo o punto de aplicación del peso $\vec{W}$, como se muestra en la figura 6.4(b).

6.5 Centroide de un área

El *centroide C de un área* se puede definir como el punto donde se encuentra concentrado el peso del área, considerándola como si tuviera peso. O sea, corresponde al centro de gravedad atribuyéndole al área características de poseer peso. Teniendo en cuenta tales atributos, las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes a la posición del centroide C se determinan mediante el mismo procedimiento utilizado para definir el centro de gravedad G de un cuerpo.

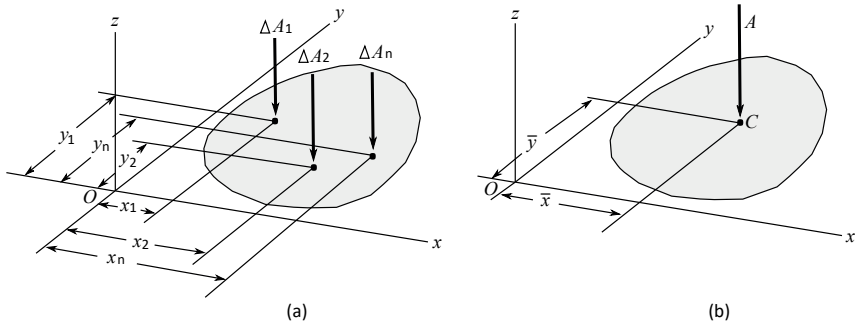


Figura 6.5

Se divide el área A en pequeños diferenciales de áreas dadas por ΔA_1, ΔA_2, hasta ΔA_n, como se muestra en la figura 6.5(a), las cuales se encuentran localizadas respectivamente en los puntos de coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), hasta (x_n, y_n). Por tanto, para determinar el área total A se efectúa la sumatoria de todas las pequeñas áreas, así:

$$\sum A:\ A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \tag{6.4}$$

Se realiza la sumatoria de momentos con respecto al eje y, para hallar la coordenada $\bar{x}$, así:

$$\sum \mathrm{M}_y:\ \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \ldots + x_n\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta A_i \tag{6.5}$$

Y al efectuar la sumatoria de momentos con respecto al eje x, se encuentra la coordenada $\bar{y}$:

$$\sum \mathrm{M}_x:\ \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \ldots + y_n\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta A_i \tag{6.6}$$

Por lo tanto, con base en las relaciones 6.4, 6.5 y 6.6, se obtiene:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \qquad \bar{x}A = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta A_i \qquad \bar{y}A = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta A_i \tag{6.7}$$

Al aumentar el número de n diferenciales de áreas, haciéndolas infinitamente pequeñas, en el límite las sumatorias anteriores tienden a las integrales 6.8, las cuales definen las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes al centroide C de un área A, como se indica en la figura 6.5(b).

$$A = \int dA \qquad \bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{6.8}$$

6.5.1 Ejemplo 6.1

Determinar por integración directa las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes al centroide C del área A definida por la parábola $y = kx^2$ y el eje x, como se indica en la figura 6.6(a).

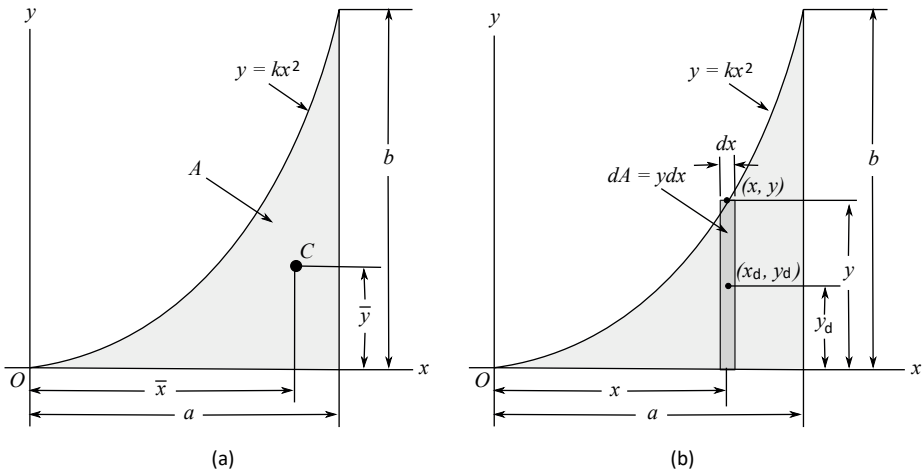


Figura 6.6

Solución

Se toma un diferencial de área $dA = ydx$ de forma vertical, como se muestra en la figura 6.6(b), el cual corta a la curva dada de la parábola $y = kx^2$ en el punto de coordenadas (x, y), quedando definidas las coordenadas del centroide de dicho diferencial como:

$$x_d = x \qquad y_d = y/2$$

Se determina el valor de la constante k al reemplazar los datos $x = a$, $y = b$ en la ecuación $y = kx^2$, dando como resultado:

$$b = ka^2 \quad k = b/a^2$$

Con base en la figura 6.6(a) y teniendo en cuenta las ecuaciones 6.8, se tiene:

$$A = \int dA \qquad \bar{x}A = \int xdA \qquad \bar{y}A = \int ydA$$

Se realiza sumatoria de las áreas y de los momentos y se sustituyen valores:

$$A = \int dA = \int_0^a ydx = \int_0^a kx^2 dx = \frac{b}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{b}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

$$\bar{x}A = \int x_d dA = \int_0^a xydx = \int_0^a xkx^2 dx = \frac{b}{a^2}\int_0^a x^3 dx = \frac{b}{a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^2 b}{4}$$

$$A = \frac{ab}{3} \quad \bar{x}A = \frac{a^2 b}{4} \quad \bar{x} = \frac{\bar{x}A}{A} \quad \boldsymbol{\bar{x} = \frac{3a}{4}}$$

$$\bar{y}A = \int y_a dA = \int_0^a \left(\frac{y}{2}\right) y dx = \int_0^a \frac{k^2 x^4}{2} dx = \frac{b^2}{2a^4} \int_0^a x^4 dx = \frac{b^2}{2a^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

$$A = \frac{ab}{3} \quad \bar{y}A = \frac{ab^2}{10} \quad \bar{y} = \frac{\bar{y}A}{A} \quad \boldsymbol{\bar{y} = \frac{3b}{10}}$$

6.6 Ejes de simetría de un área

Un *eje de simetría de un área* es una línea imaginaria que divide al área en dos partes iguales, de tal manera que para cada punto de una de las subáreas existe un punto equidistante en la otra subárea. Por ejemplo, el área mostrada en la figura 6.7(a) posee el eje de simetría indicado por la línea 1-1, la cual divide el área total en dos partes iguales situadas a lado y lado de dicho eje, de tal forma que para cada punto del área de la izquierda existe un punto respectivo en el área de la derecha, equidistante de la línea 1-1. Se puede visualizar como si el eje 1-1 dividiera al área en dos y una de las partes fuera la imagen espejo de la otra.

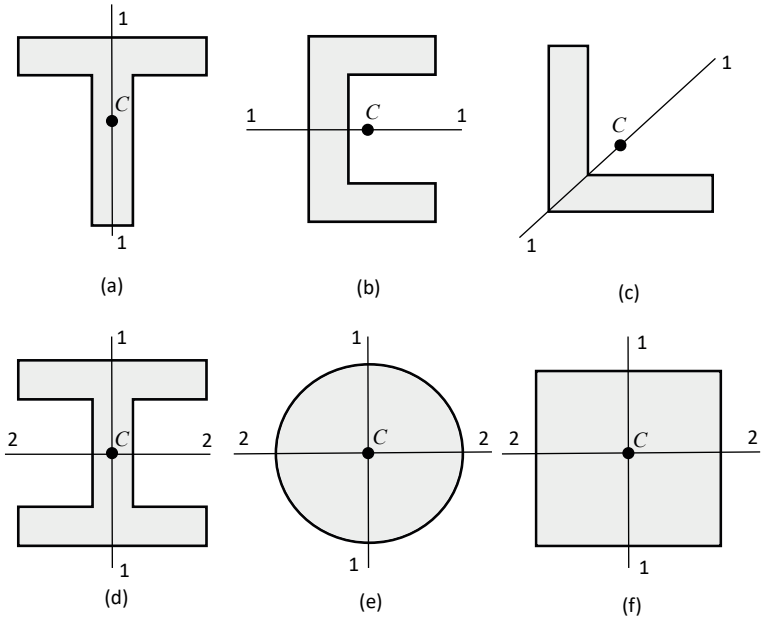


Figura 6.7

De acuerdo con lo anterior, las áreas mostradas en las figuras 6.7(a), 6.7(b) y 6.7(c) poseen un eje de simetría, definido por las líneas 1-1, mientras que las ilustradas en las figuras 6.7(d), 6.7(e) y 6.7(f) cuentan con dos, dados por las líneas 1-1 y 2-2. Cuando un

área posee un eje de simetría, como en el primer caso, su centroide se encuentra localizado sobre dicho eje; en cambio, si el área presenta dos ejes, como en el segundo caso, su centroide queda ubicado en el punto donde se cortan dichos ejes, como se puede apreciar en las respectivas figuras.

6.7 Centroide de áreas compuestas

Para determinar el centroide de un área compuesta, se divide en áreas conocidas y se sigue el mismo procedimiento utilizado para hallar el punto de aplicación de la resultante de varias fuerzas paralelas, visto en la sección 6.3, además de lo contemplado en la sección 6.5.

Considere el caso del área compuesta por tres áreas conocidas, como el mostrado en la figura 6.8(a), para la cual, una vez localizados los respectivos centroides dados por (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), se propone encontrar las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes al centroide *C* del área total.

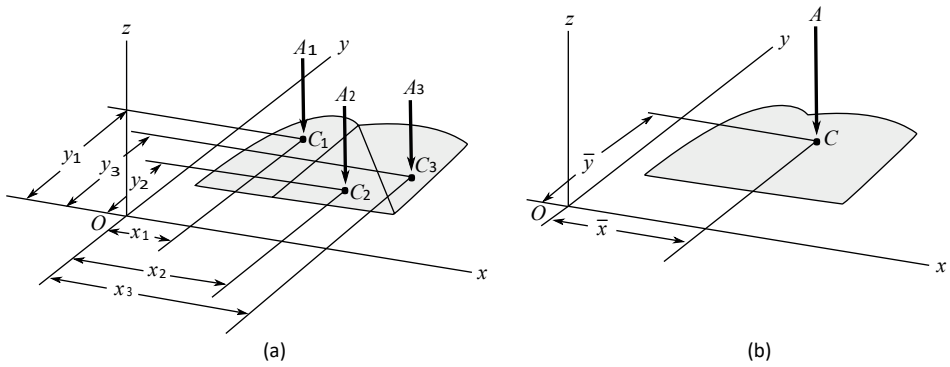


Figura 6.8

El área total *A* está dada mediante la suma de las áreas parciales:

$$\sum A: \; A = A_1 + A_2 + A_3 \tag{6.9}$$

La coordenada $\bar{x}$ se halla mediante la sumatoria de momentos con respecto al eje y:

$$\sum \mathrm{M}_y: \; \bar{x}A = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 \tag{6.10}$$

El valor de $\bar{y}$ se encuentra al realizar la sumatoria de momentos con respecto al eje x:

$$\sum \mathrm{M}_x: \; \bar{y}A = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 \tag{6.11}$$

Al despejar $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de las relaciones 6.10 y 6.11, respectivamente, y sustituir el valor de A, dado por la expresión 6.9, se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad \bar{y} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \tag{6.12}$$

En forma general, las ecuaciones 6.9 y 6.12 se hacen extensivas para el caso de un área A compuesta de un número de i áreas, así:

$$A = \sum A_i \qquad \bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A} \tag{6.13}$$

Siendo A_i cada una de las áreas y (x_i, y_i) las correspondientes coordenadas de los centroides.

El procedimiento básico para hallar las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ pertenecientes al centroide C de un área compuesta consiste en:

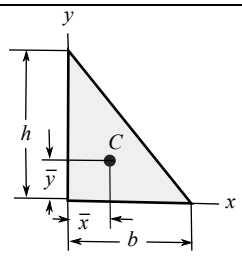
1. Dividir el área compuesta en áreas conocidas, para lo cual es importante consultar la información de áreas y sus centroides, ofrecida por la tabla 6.1.
2. Establecer un punto de referencia común, válido para las coordenadas de los centroides de todas las áreas individuales y del área compuesta requerida.
3. Calcular dichas coordenadas con base en el punto de referencia seleccionado y sus respectivas áreas individuales.
4. Aplicar las ecuaciones 6.13, con el fin de obtener las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, del área compuesta por determinar, para lo cual es conveniente organizar los datos en tablas, como se verá en el siguiente ejemplo.

6.7.1 Ejemplo 6.2

Calcular las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes al centroide C del área sombreada compuesta mostrada en la figura 6.9(a).

Tabla 6.1 Centroides de áreas usuales

CENTROIDES DE ÁREAS USUALES



Área triangular

$$\text{Área} = \frac{bh}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{b}{3}$$

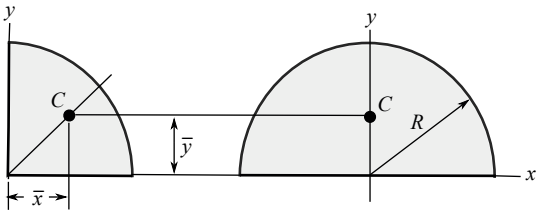
$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$

Cuadrante de área circular

$$\text{Área} = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$



Área semicircular

$$\text{Área} = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\bar{x} = 0$$

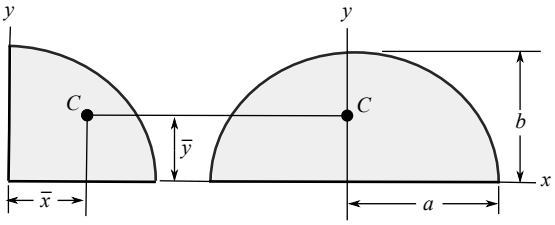
$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

Cuadrante de área elíptica

$$\text{Área} = \frac{\pi ab}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$$



Área semielíptica

$$\text{Área} = \frac{\pi ab}{2}$$

$$\bar{x} = 0$$

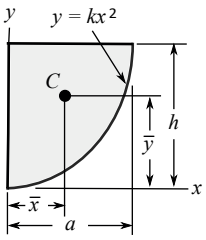
$$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$$

Área parabólica

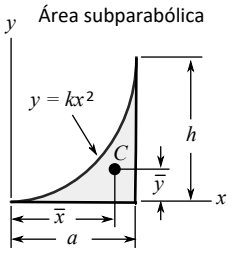
$$\text{Área} = \frac{2ah}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{3a}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{3h}{5}$$



Área subparabólica



$$\text{Área} = \frac{ah}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{3a}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{3h}{10}$$

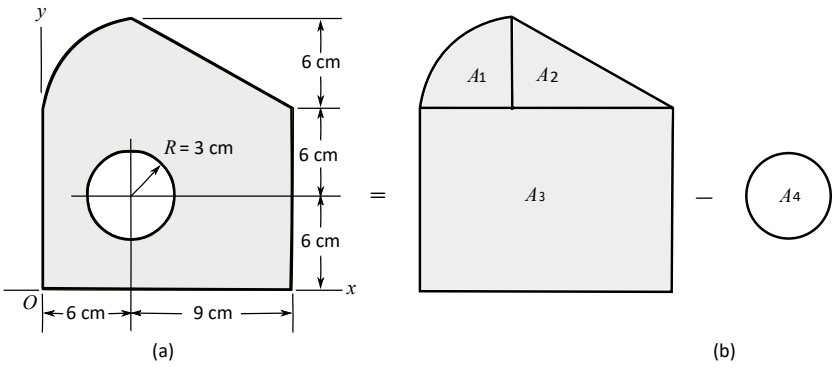


Figura 6.9

Solución

Se divide el área compuesta en áreas conocidas, como se indica en la figura 6.9(b):

A_1 = cuarto de círculo A_2 = triángulo A_3 = rectángulo A_4 = círculo

Se calculan las áreas y se establece el origen *O* del sistema de coordenadas *xy*, como punto de referencia común para todos los centroides.

— *Cuarto de círculo:* indicado en la figura 6.10(a), teniendo en cuenta la tabla 6.1, para un cuadrante de área circular, los cálculos son los siguientes:

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi(6\text{ cm})^2}{4} = 28.27\text{ cm}^2$$

$$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4(6\text{ cm})}{3\pi} = 2.54\text{ cm} \qquad x_1 = 6\text{ cm} - \bar{x} = 3.46\text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4(6\text{ cm})}{3\pi} = 2.54\text{ cm} \qquad y_1 = 12\text{ cm} + \bar{y} = 14.54\text{ cm}$$

— Dado que los valores $(\bar{x}, \bar{y})$ corresponden a las coordenadas del cuarto de círculo con referencia en el origen particular O_1, como se indica en la figura 6.10(a), las coordenadas requeridas (x_1, y_1) se han ajustado con base en el origen común *O*.

— *Triángulo:* como se aprecia en la figura 6.10(b), por tanto, de acuerdo con la tabla 6.1 y una vez ajustados los valores al punto de referencia común *O*, se tiene:

$$A_2 = \frac{bh}{2} = \frac{(9\text{ cm})(6\text{ cm})}{2} = 27\text{ cm}^2$$

$$\bar{x} = \frac{b}{3} = \frac{9\text{ cm}}{3} = 3\text{ cm} \qquad x_2 = 6\text{ cm} + \bar{x} = 9\text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{3} = \frac{6\text{ cm}}{3} = 2\text{ cm} \qquad y_2 = 12\text{ cm} + \bar{y} = 14\text{ cm}$$

— *Rectángulo:* con base en la figura 6.11(b), para el rectángulo los datos son:

$$A_3 = bh = (6\text{ cm} + 9\text{ cm})(6\text{ cm} + 6\text{ cm}) = 180\text{ cm}^2$$

$$x_3 = \frac{(6\text{ cm} + 9\text{ cm})}{2} = 7.5\text{ cm} \qquad y_3 = \frac{(6\text{ cm} + 6\text{ cm})}{2} = 6\text{ cm}$$

— *Círculo:* para un círculo, como se muestra en la figura 6.11(b) y con referencia en el punto *O*, los cálculos son los siguientes:

$$A_4 = \pi R^2 = \pi(3\text{ cm})^2 = 28.27\text{ cm}^2 \quad x_4 = 6\text{ cm} \;\; y_4 = 6\text{ cm}$$

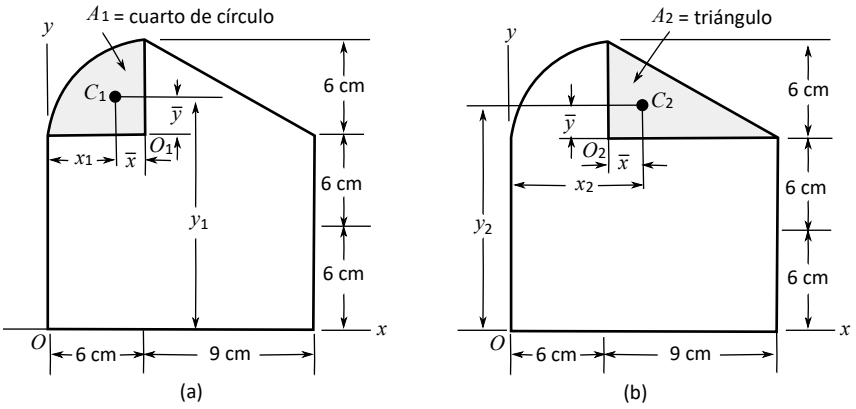


Figura 6.10

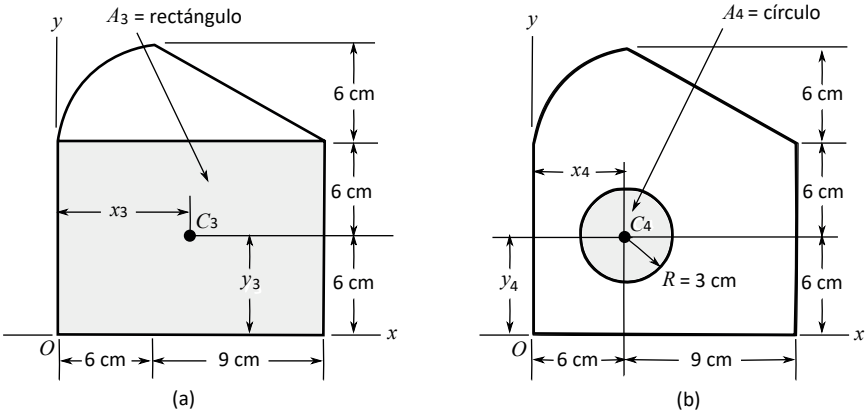


Figura 6.11

Se aplican las ecuaciones 6.13, para lo cual se organizan primeramente los datos, como se indica en la tabla 6.2, teniendo en cuenta que los datos relativos al círculo se consideran negativos, por representar un agujero.

Tabla 6.2

Áreas	A_i (cm²)	x_i (cm)	$x_i A_i$ (cm³)	y_i (cm)	$y_i A_i$ (cm³)
Cuarto de círculo	28.27	3.46	97.81	14.54	411.04
Triángulo	27	9	243	14	378
Rectángulo	180	7.5	1350	6	1 080
Círculo	-28.27	6	-169.62	6	-169.62
$\sum \boldsymbol{A_i} = \mathbf{207}\ \text{cm}^2$			$\sum \boldsymbol{x_i A_i} = \mathbf{1521.19}\ \text{cm}^3$		$\sum \boldsymbol{y_i A_i} = \mathbf{1699.42}\ \text{cm}^3$

Al aplicar las relaciones 6.13, se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{1\,521.19\ \text{cm}^3}{207\ \text{cm}^2} = 7.34\ \text{cm} \qquad \bar{x} = \mathbf{7.34}\ \text{cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{1\,699.42\ \text{cm}^3}{207\ \text{cm}^2} = 8.20\ \text{cm} \qquad \bar{y} = \mathbf{8.20}\ \text{cm}$$

6.7.2 Ejemplo 6.3

Determinar por el método de áreas compuestas las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide C del área A mostrada en la figura 6.12(a).

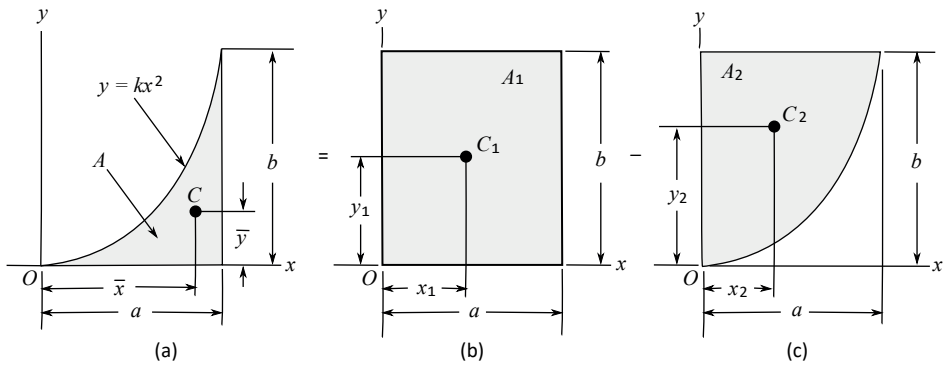


Figura 6.12

Solución

Se divide el área compuesta en áreas conocidas, como se muestra en las figuras 6.12(b) y 6.12(c).

A_1 = rectángulo A_2 = área parabólica

Se escoge el origen *O* del sistema *xy* como punto de referencia y se calcula cada área y su centroide con respecto a *O*.

— *Rectángulo:* para un rectángulo los datos son los siguientes:

$$A_1 = ab \quad x_1 = \frac{a}{2} \quad y_1 = \frac{b}{2}$$

— *Área parabólica:* de acuerdo con los datos de la tabla 6.1, los valores son:

$$A_2 = \frac{2ab}{3} \quad x_2 = \frac{3a}{8} \quad y_2 = \frac{3b}{5}$$

Se organizan los datos, como se aprecia en la tabla 6.3, teniendo en cuenta que los datos relacionados con el área parabólica son negativos por tratarse de una sustracción de áreas y se aplican las relaciones 6.13.

Tabla 6.3

Áreas	A_i	x_i	$x_i A_i$	y_i	$y_i A_i$
Rectángulo	ab	a/2	$a^2 b/2$	$b/2$	$ab^2/2$
Área parabólica	$-2ab/3$	$3a/8$	$-a^2 b/4$	$3b/5$	$-2ab^2/5$
$\sum A_i = ab/3$		$\sum x_i A_i = a^2 b/4$		$\sum y_i A_i = ab^2/10$	

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{a^2 b/4}{ab/3} = \frac{3a}{4} \qquad \bar{x} = \mathbf{\frac{3a}{4}}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{ab^2/10}{ab/3} = \frac{3b}{10} \qquad \bar{y} = \mathbf{\frac{3b}{10}}$$

Nótese que los valores son iguales a los obtenidos mediante el ejemplo 6.1, lo cual muestra la aplicación de dos métodos opcionales para calcular el centroide de áreas.

6.8 Fuerzas distribuidas sobre vigas

En muchas ocasiones, las vigas se encuentran sometidas a cargas, como el peso de materiales, las cuales se pueden expresar mediante un sistema de fuerzas distribuidas a lo largo de

la viga, siendo conveniente reemplazarlo por una fuerza concentrada equivalente, para realizar cálculos, como las reacciones en los apoyos.

Considere la viga de ancho constante α y longitud *L* medida en el eje *x*, bajo una carga por unidad de altura *w*, expresada en el eje *w*, como se indica en la figura 6.13.

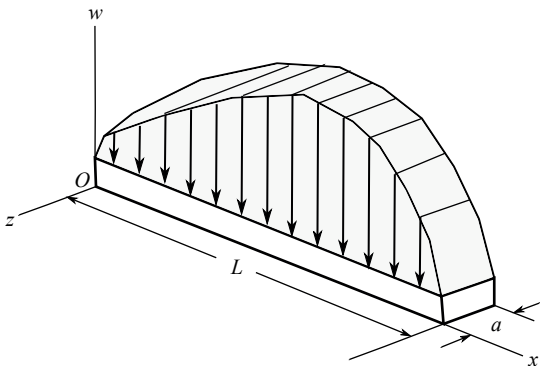


Figura 6.13

Al tener la viga un ancho constante, lo cual implica que el peso total aplicado solo depende de dos variables, como son la altura *w* y la longitud *L*, dicha distribución de carga se puede representar mediante un sistema de fuerzas paralelas cubriendo un área *A* en el plano *wx*, como se indica en la figura 6.14(a), en donde la carga varía de tal manera que es expresada como una función de *x*, o sea $w = f(x)$.

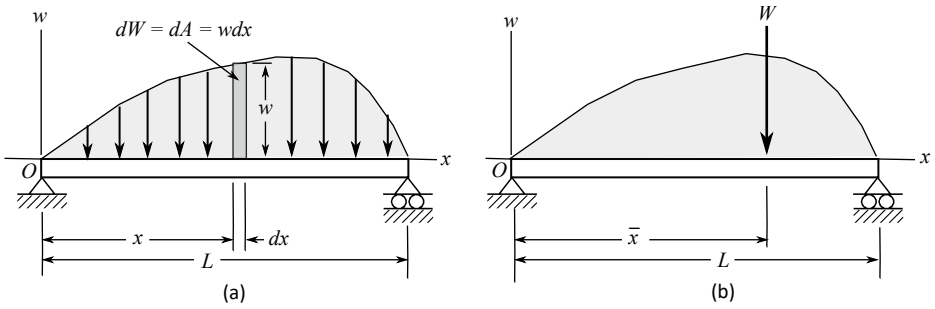


Figura 6.14

Esto es:

$$W = \int dW = \int wdx = \int f(x)dx = \int dA = A = \text{área bajo la curva de carga}$$

La carga total $W = A$, mostrada en la figura 6.14(b), representa la fuerza concentrada equivalente al sistema de fuerzas paralelas distribuidas bajo la curva de carga, indicado en la figura 6.14(a). Con el fin de encontrar la posición donde actúa W, dada por el valor $\bar{x}$, se toma sumatoria de momentos con respecto al punto O, así:

$$\bar{x}W = \bar{x}A = \int xdW = \int xdA$$

Al comparar la ecuación anterior con la relación 6.8, para definir la posición $\bar{x}$ correspondiente al centroide del área A, se concluye que la posición de la carga concentrada W es la misma del centroide del área A, definida como el área bajo la curva de carga, lo cual será ilustrado con el ejemplo dado a continuación.

6.8.1 Ejemplo 6.4

Una viga se encuentra sometida a una carga tal cuya distribución se puede representar como se muestra en la figura 6.15. Determinar las reacciones correspondientes en los apoyos A y B.

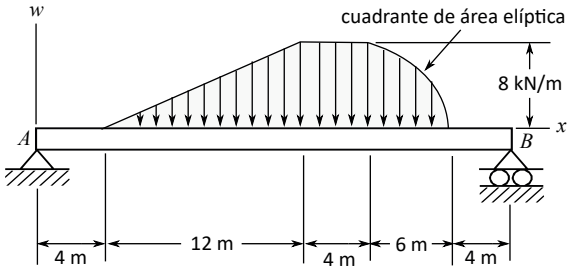


Figura 6.15

Solución

La carga distribuida se representa mediante un área compuesta y se divide en áreas conocidas, como se indica en la figura 6.16(a):

$A_1 = W_1 =$ triángulo $\quad A_2 = W_2 =$ rectángulo $\quad A_3 = W_3 =$ cuadrante elíptico

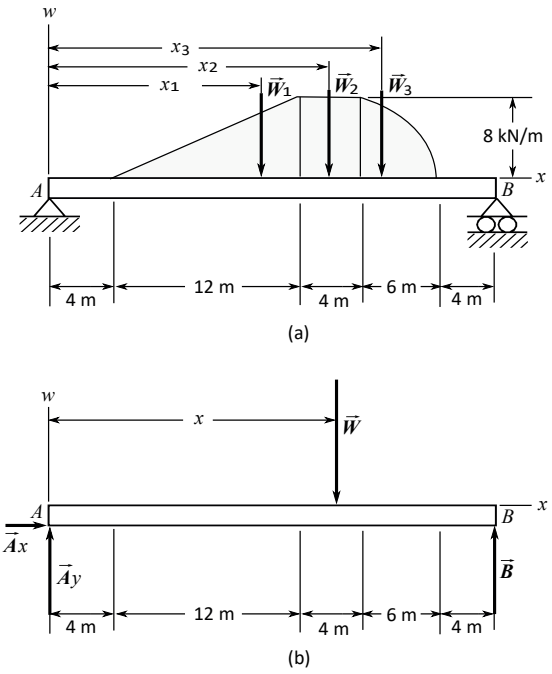


Figura 6.16

Se establece el origen A del sistema wx como punto de referencia común y se calcula cada una de las áreas con sus correspondientes centroides respecto del punto A.

$$W_1 = \frac{(12\text{ m})(8\text{ kN/m})}{2} = 48\text{ kN} \quad x_1 = 4\text{ m} + 12\text{ m} - \frac{12\text{ m}}{3} = 12\text{ m}$$

$$W_2 = (4\text{ m})(8\text{ kN/m}) = 32\text{ kN} \quad x_2 = 4\text{ m} + 12\text{ m} + 2\text{ m} = 18\text{ m}$$

$$W_3 = \frac{\pi(6\text{ m})(8\text{ kN/m})}{4} = 37.69\text{ kN}$$

$$x_3 = 4\text{ m} + 12\text{ m} + 4\text{ m} + \frac{4(6\text{ m})}{3\pi} = 22.54\text{ m}$$

Tabla 6.4

Áreas	A_i (kN)	x_i(m)	x_iA_i (kNm)
Triángulo	48	12	576
Rectángulo	32	18	576
Cuadrante de área elíptica	37.69	22.54	849.53
$\sum A_i = 117.69\,\text{kN}$ $\quad\quad$ $\sum x_iA_i = 2001.53\,\text{kNm}$			

$$x = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{2\,001.53 \text{ kNm}}{117.69 \text{ kN}} = 17 \text{ m} \qquad x = 17 \text{ m}$$

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 6.16(b), en donde la carga distribuida se sustituye por la carga concentrada $W = 117.69$ kN actuando en la posición dada por $x = 17$ m, calculado con datos de la tabla 6.4, y se aplican las ecuaciones de equilibrio para hallar las requeridas reacciones en los apoyos A y B, así:

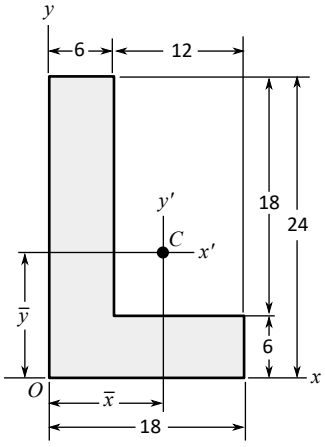
$$\sum M_A + \curvearrowright = 0\text{: } (17 \text{ m})(117.69 \text{ kN}) - (B)(30 \text{ m}) = 0 \quad \boldsymbol{B = 66.69 \text{ kN}}$$

$$\sum F_x + \rightarrow = 0\text{: } \boldsymbol{A_x = 0}$$

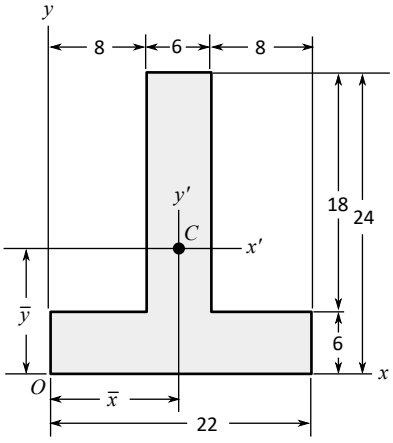
$$\sum F_y + \uparrow = 0\text{: } A_y + B - W = 0 \quad A_y + 66.69 \text{ kN} - 117.69 \text{ kN} = 0 \qquad \boldsymbol{A_y = 51 \text{ kN}}$$

6.9 Problemas propuestos

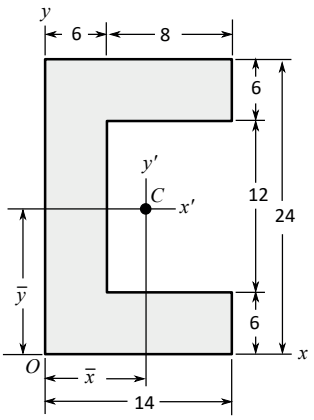
Problemas 6.1 hasta 6.14. Para cada una de las áreas compuestas mostradas en las figuras, cuyas medidas están dadas en centímetros (cm), calcular el área total y las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes al centroide C.



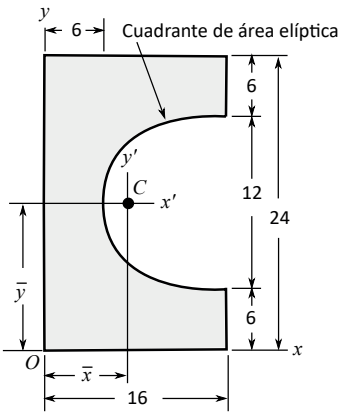
Problema 6.1



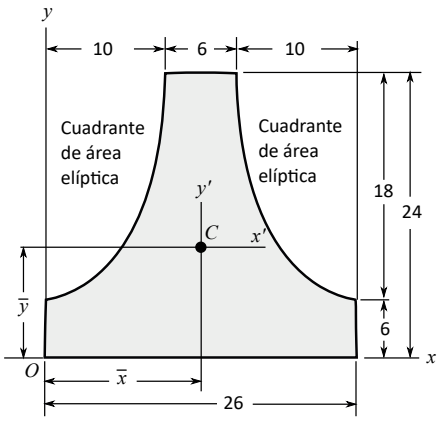
Problema 6.2



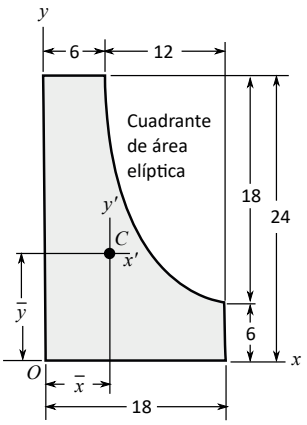
Problema 6.3



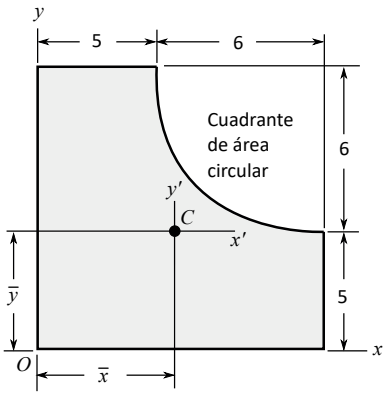
Problema 6.4



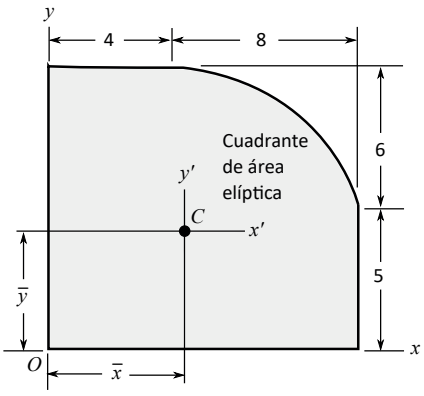
Problema 6.5



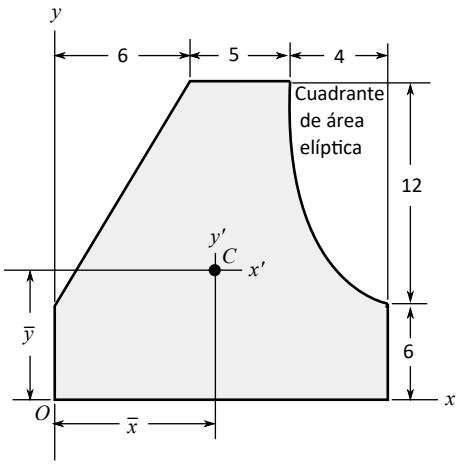
Problema 6.6



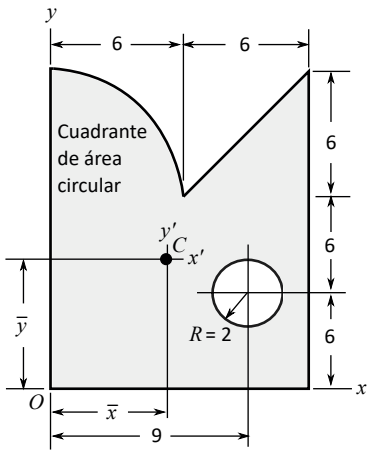
Problema 6.7



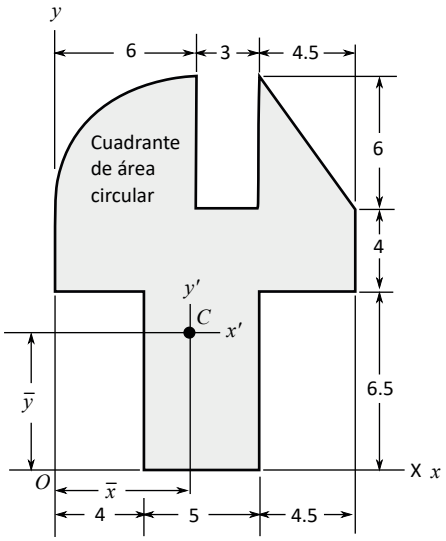
Problema 6.8



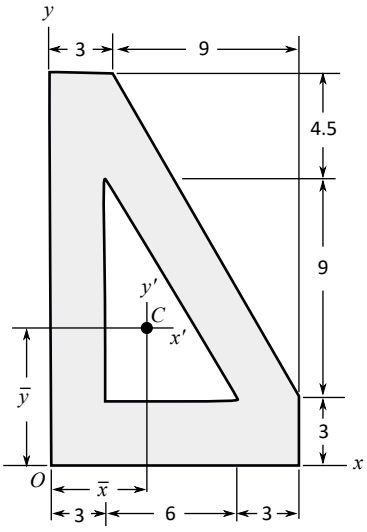
Problema 6.9



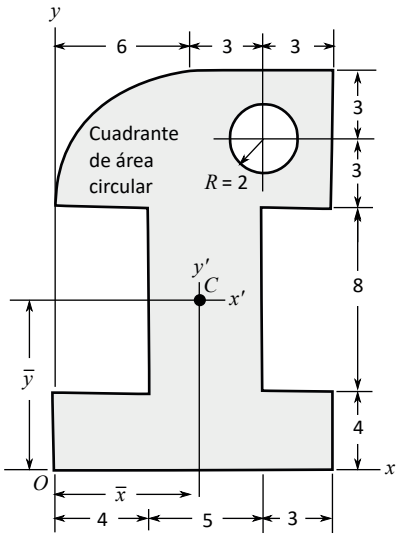
Problema 6.10



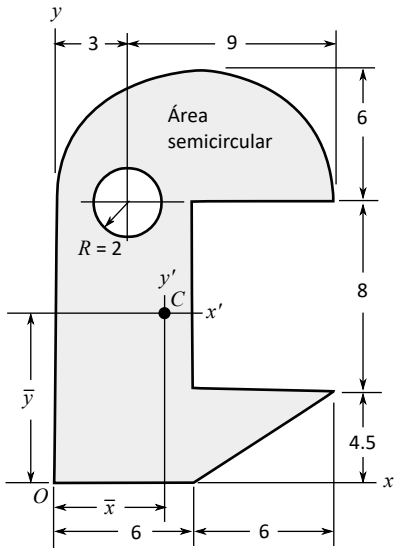
Problema 6.11



Problema 6.12

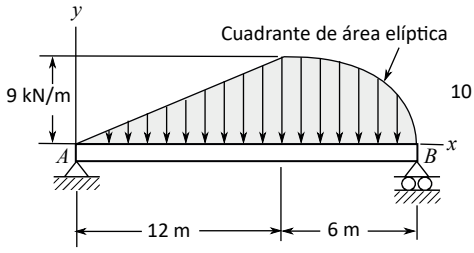


Problema 6.13

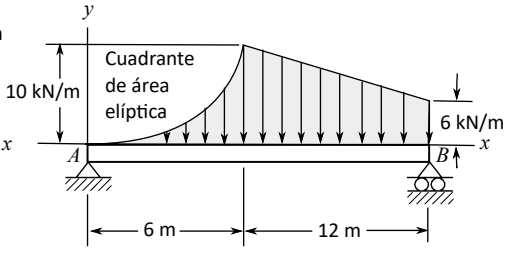


Problema 6.14

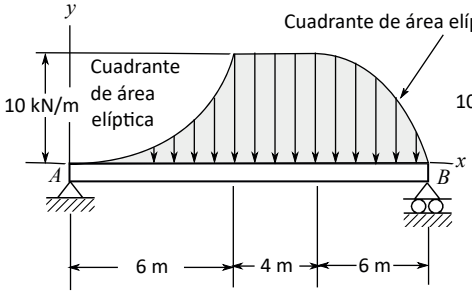
Problemas 6.15, 6.16, 6.17 y 6.18. Las vigas mostradas en las figuras se encuentran sometidas a las cargas distribuidas indicadas. Calcular, para cada una de ellas, las reacciones en los puntos de apoyo *A* y *B*.



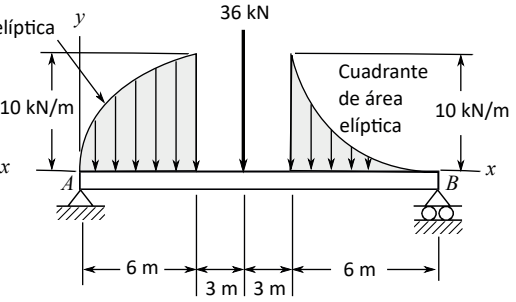
Problema 6.15



Problema 6.16

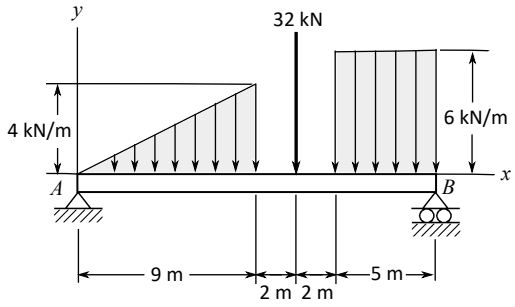


Problema 6.17

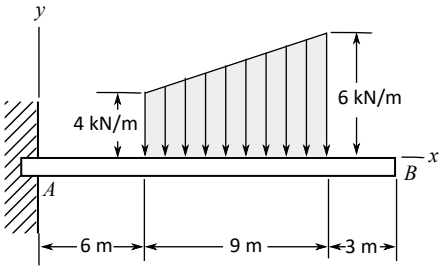


Problema 6.18

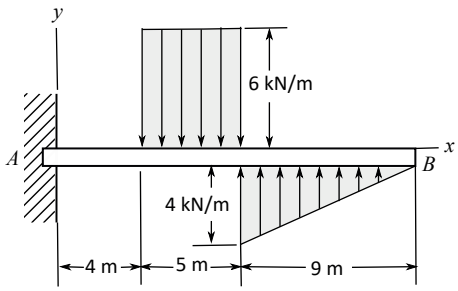
Problemas 6.19, 6.20, 6.21 y 6.22. Para cada una de las vigas con las cargas distribuidas indicadas en las figuras, hallar la reacción en el punto de empotramiento *A*.



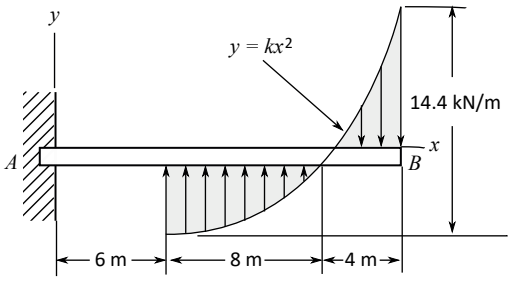
Problema 6.19



Problema 6.20



Problema 6.21



Problema 6.22

Momentos de inercia de áreas

7

Objetivos del capítulo

- Establecer la relación entre el momento de primer y de segundo orden de un área.
- Definir los términos y ecuaciones relacionadas con los momentos de inercia de áreas.
- Estudiar el teorema de los ejes paralelos y determinar el momento de inercia de áreas compuestas.
- Utilizar los parámetros dados en las tablas de perfiles estructurales.

7.1 Introducción

En el capítulo anterior se utilizaron las integrales $\int xdA$ e $\int ydA$, denominadas *momentos de primer orden del área A* con respecto a los ejes y y x, respectivamente, para calcular las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes al centroide C de un área A y para determinar también la posición del punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas distribuidas en vigas de ancho constante, las cuales, como se analizó en la sección 6.8, se pueden sustituir por una sola fuerza W, equivalente al área bajo la curva de distribución de carga, al existir en dicho caso una proporcionalidad directa entre carga y área, razón por la cual se adoptaron las siguientes ecuaciones:

$$\sum F:\ W = \int dw = \int kdA = k\int dA = kA \tag{7.1}$$

$$\sum M_y:\ \bar{x}\,W = \int xdw = \int kxdA = k\int xdA \tag{7.2}$$

$$\sum M_x\colon\ \bar{y}\,W = \int ydw = \int kydA = k\int ydA \tag{7.3}$$

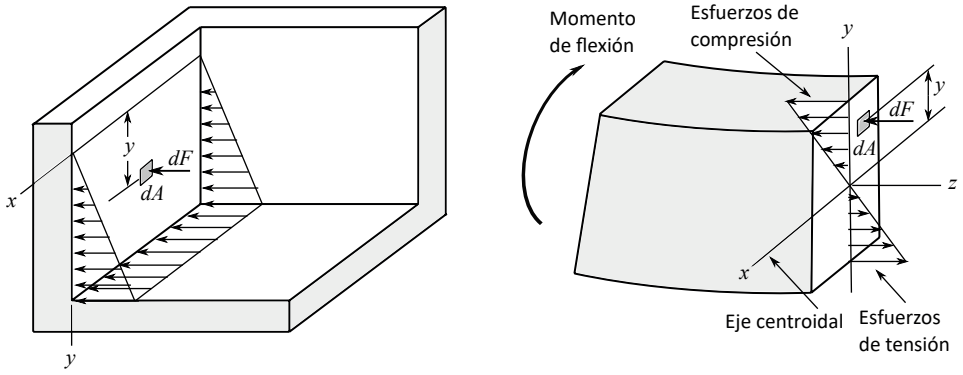
Las anteriores relaciones expresan que la magnitud de la fuerza equivalente W es proporcional al área A, según la ecuación 7.1, y además, que los momentos $\bar{x}W$ y $\bar{y}W$ son directamente proporcionales a los respectivos momentos de primer orden de las áreas $\int xdA$ e $\int ydA$, de acuerdo con las relaciones 7.2 y 7.3, siendo k una constante.

Cuando se trata de cargas que varían linealmente, respecto de un eje de referencia, como en el caso de la presión sobre superficies sumergidas, la cual aumenta proporcionalmente con la profundidad, como se muestra en la figura 7.1(a), o en los esfuerzos, de tensión o de compresión, sobre la sección transversal en una viga con carga de flexión pura, los cuales son también proporcionales a la distancia con respecto a un eje centroidal o eje neutro, como se indica en la figura 7.1(b), tal variación de la presión o esfuerzo, $P = F/A = kx$ o $P = F/A = ky$, se puede expresar en términos de la fuerza F y el área A sobre la cual actúa, mediante la relación $dF = kxdA$ o $dF = kydA$, según el caso, quedando modificadas las ecuaciones anteriores, así:

$$\sum F\colon\ F = \int kxdA = k\int xdA = k\bar{x}A \quad \text{o} \quad F = \int kydA = k\int ydA = k\bar{y}A \tag{7.4}$$

$$\sum M_y\colon\quad \int xdF = \int xkxdA = k\int x^2dA \tag{7.5}$$

$$\sum M_x\colon\quad \int ydF = \int ykydA = k\int y^2dA \tag{7.6}$$



(a) Presión sobre áreas sumergidas

(b) Esfuerzos sobre áreas en viga a flexión pura

Figura 7.1

Relaciones que indican que la magnitud de la fuerza equivalente F resulta ser proporcional al área A multiplicada por su centroide x o y según el caso, conforme a la ecuación 7.4, y los momentos equivalentes $\int xdF$ e $\int ydF$ se encuentran en relación directa con las integrales $\int x^2dA$ e $\int y^2dA$, respectivamente, como se aprecia en las relaciones 7.5 y 7.6, denominadas *momentos de segundo orden del área A* o *momentos de inercia del área A*.

Tanto los centroides de áreas, relacionados con los momentos de primer orden, como los momentos de inercia de áreas, asociados a los momentos de segundo orden, son propiedades geométricas con importantes aplicaciones en ingeniería, las cuales forman parte de las ecuaciones utilizadas para el cálculo de las cargas o esfuerzos soportados, tanto por elementos estructurales como por piezas sumergidas, contempladas en las asignaturas Resistencia de Materiales, Estática de Fluidos y Análisis Estructural.

7.2 Momentos de primer y segundo orden

Como fue tratado en la sección 6.5, para hallar las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes a la posición del centroide C de un área A, se divide en n pequeños diferenciales de áreas dadas por ΔA_1, ΔA_2, hasta ΔA_n, como se muestra en la figura 7.2(a), las cuales se encuentran localizadas respectivamente en los puntos de coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), hasta (x_n, y_n).

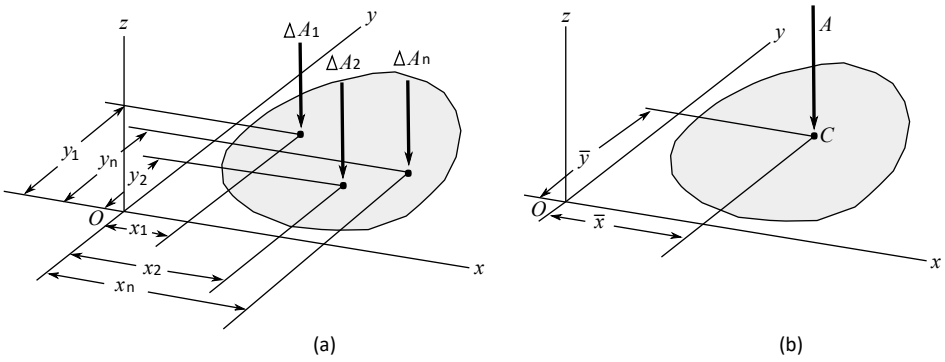


Figura 7.2

El área total A se determina al efectuar la sumatoria de todas las pequeñas áreas, así:

$$\sum A:\ A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \tag{7.7}$$

Para hallar la coordenada $\bar{x}$ se realiza la sumatoria de momentos respecto del eje y, así:

$$\sum M_y:\ \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \ldots + x_n\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta A_i \tag{7.8}$$

La coordenada $\bar{y}$ se encuentra mediante la suma de momentos respecto a x:

$$\sum M_x:\ \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \ldots + y_n\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta A_i \tag{7.9}$$

Con base en las relaciones 7.7, 7.8 y 7.9, se obtiene:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \qquad \bar{x}A = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta A_i \qquad \bar{y}A = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta A_i \tag{7.10}$$

Al aumentar el número de n diferenciales de áreas, haciéndolas infinitamente pequeñas, en el límite las sumatorias anteriores tienden a las integrales:

$$A = \int dA \qquad \bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{7.11}$$

Las relaciones 7.11, iguales a las 6.8, definen las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondientes al centroide C de un área A, como se indica en la figura 7.2(b).

Ahora, se toman nuevamente momentos con respecto a los ejes y y x, por lo cual las ecuaciones 7.8 y 7.9 se convierten respectivamente en:

$$\sum M_y:\ k_y^2A = x_1^2\Delta A_1 + x_2^2\Delta A_2 + \ldots + x_n^2\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta A_i \tag{7.12}$$

$$\sum M_x:\ k_x^2A = y_1^2\Delta A_1 + y_2^2\Delta A_2 + \ldots + y_n^2\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} y_i^2\Delta A_i \tag{7.13}$$

Se observa que las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ pertenecientes al centroide C del área A, obtenidas después de calcular los momentos de primer orden, las cuales se muestran en la figura 7.2(b), se encuentran asociadas ahora a las cantidades k_y y k_x, respectivamente, indicadas en la figura 7.3(b), en forma de coordenadas del punto C', definidas como resultado de aplicar los momentos de segundo orden. Dichas cantidades se denominan *radios de giro del área A* con respecto a los ejes y y x, respectivamente, y se designan así:

k_y = radio de giro con respecto al eje y $\quad k_x$ = radio de giro con respecto al eje x

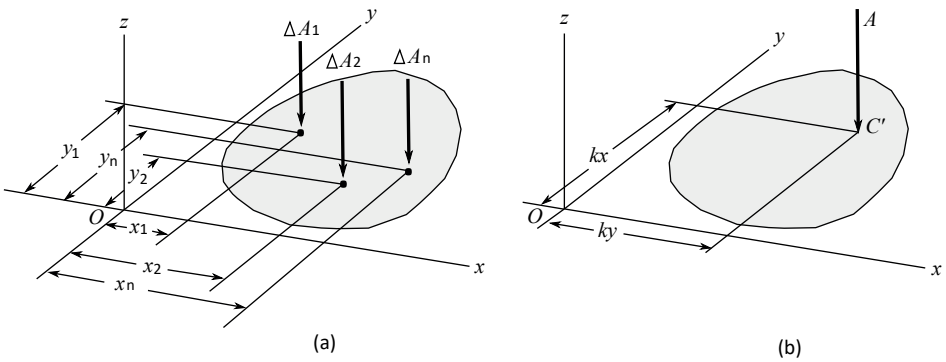


Figura 7.3

Las ecuaciones 7.12 y 7.13 se expresan así:

$$k_y^2 A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta A_i \qquad k_x^2 A = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta A_i \tag{7.14}$$

Al aumentar el número de n diferenciales de áreas, haciéndolas infinitamente pequeñas, en el límite las sumatorias anteriores tienden a las integrales:

$$k_y^2 A = \int x^2 dA \qquad k_x^2 A = \int y^2 dA \tag{7.15}$$

Las integrales $\int x^2 dA$ e $\int y^2 dA$ se denominan momentos de segundo orden o momentos de inercia del área A con respecto a los ejes y y x, respectivamente. Dado que el momento de inercia con respecto al eje y se designa por I_y, así como el momento de inercia con respecto al eje x se designa por I_x, se tiene:

$$\boldsymbol{I_y = \int x^2 dA} \qquad \boldsymbol{I_x = \int y^2 dA} \tag{7.16}$$

Al comparar las ecuaciones 7.11 y 7.15, se da:

$$\bar{x}A = \int x dA \qquad \bar{y}A = \int y dA$$

$$k_y^2 A = \int x^2 dA \qquad k_x^2 A = \int y^2 dA$$

Con base en las ecuaciones 7.15 y 7.16, se tiene:

$$k_y^2 A = I_y \quad \boldsymbol{k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}} \qquad k_x^2 A = I_x \quad \boldsymbol{k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}} \tag{7.17}$$

Las ecuaciones 7.17 relacionan los radios de giro en función de los momentos de inercia y del valor del área A.

7.3 Momentos de primer y segundo orden de un área rectangular

Considere un área rectangular de base b y altura h, como se indica en la figura 7.4(a), y tome un diferencial de área dA horizontal, por tanto $dA = bdy$. El momento de primer orden del área A con respecto a su base queda determinado así:

$$\int y dA = \int_0^h y b dy = b \int_0^h y dy = b \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{bh^2}{2}$$

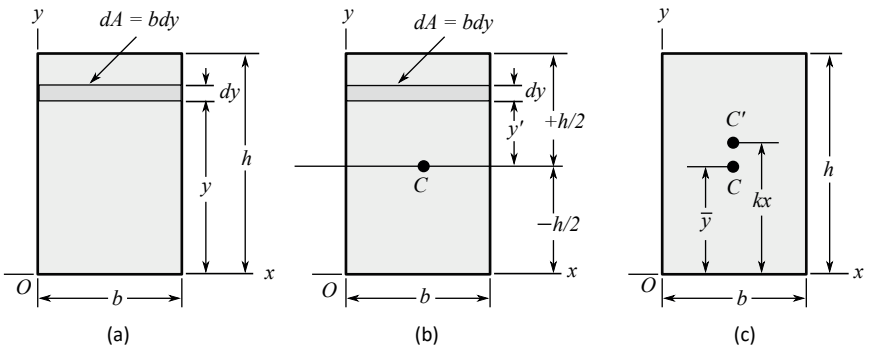


Figura 7.4

Se calcula ahora la coordenada $\bar{y}$ correspondiente al centroide del área A, así:

$$\bar{y}A = \int y dA = \frac{bh^2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{bh^2}{2A} = \frac{bh^2}{2bh} = \frac{h}{2} \qquad \boldsymbol{\bar{y} = \frac{h}{2}}$$

Si se define un eje x' que pasa por el centroide C, como se muestra en la figura 7.4(b), el momento de primer orden con respecto a dicho eje centroidal está dado por:

$$\int y' dA = \int_{-h/2}^{h/2} y' b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y' dy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-h/2}^{h/2} = 0$$

Lo anterior indica que *el momento de primer orden con respecto a su centroide,* para el área rectangular, *es igual a cero,* lo cual puede demostrar su validez también para cualquier área.

Al realizar ahora los mismos cálculos, con base en el momento de segundo orden y de acuerdo con la figura 7.4(a), el momento de inercia del área rectangular con respecto a su base está dado por:

$$\int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

Y teniendo en cuenta la figura 7.4(b), el momento de inercia del rectángulo con respecto a un eje x' que pasa por su centroide está definido por:

$$\int y'^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

Los resultados de los dos momentos quedan expresados así:

$$\boldsymbol{Ix = \frac{bh^3}{3}} \qquad \boldsymbol{Ix' = \frac{bh^3}{12}}$$

El valor $\boldsymbol{Ix}$ se denomina *momento de inercia con respecto al eje x* e $\boldsymbol{Ix'}$ es el *momento de inercia respecto al eje centroidal x′,* o *momento centroidal de inercia*.

De acuerdo con las relaciones 7.17, se determina el radio de giro k_x, como se indica en la figura 7.4(c), así:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{3bh}} = \sqrt{\frac{h^2}{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}}$$

O sea que para un área A rectangular con respecto a un eje x que pasa por su base, la medida equivalente a la coordenada $\bar{y}$ perteneciente al centroide corresponde al valor del radio de giro k_x, así:

$$\bar{y} = \frac{h}{2} = 0.5h \qquad k_x = \frac{h}{\sqrt{3}} = 0.577h$$

Nótese que la medida de k_x define un punto *C'* que se encuentra un poco por encima del centroide *C* determinado por el valor de $\bar{y}$, como se ilustra en la figura 7.4(c).

7.4 Momento polar de inercia

El momento polar de inercia o momento de inercia de un área *A* con respecto a un polo o punto *O*, designado por *Jo*, está definido por:

$$J_o = \int r^2 dA \tag{7.18}$$

Siendo *r* la distancia desde el punto *O* hasta el diferencial de área *dA*, como se aprecia en la figura 7.5, y aplicando el teorema de Pitágoras, $r^2 = x^2 + y^2$, por lo que al reemplazar en la ecuación 7.18, se tiene:

$$Jo = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = Iy + Ix$$

$$\boldsymbol{Jo = Ix + Iy} \tag{7.19}$$

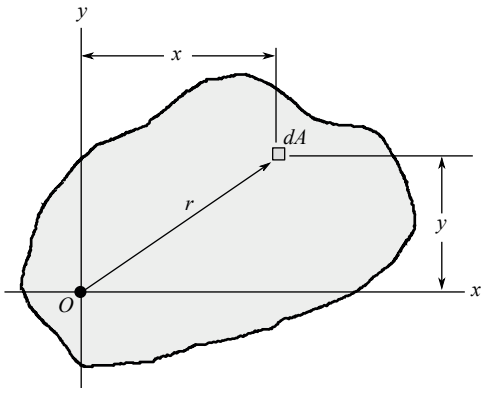


Figura 7.5

Mientras que el momento de inercia de un área *A* con respecto a un punto designado por ***Jo*** se denomina *momento polar de inercia,* los momentos con respecto a ejes *x* y *y*, definidos respectivamente como $\boldsymbol{I_x}$ e $\boldsymbol{I_y}$, se llaman *momentos rectangulares de inercia*. De acuerdo con la ecuación 7.19, se puede decir que el momento polar de inercia *Jo* es igual a la suma de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y, siendo *O* el punto de intersección de los ejes *x* y *y*.

7.5 Teorema de los ejes paralelos

El *teorema de los ejes paralelos* o *teorema de Steiner* afirma que el momento de inercia de un área *A* respecto de un eje *E*, paralelo a un eje centroidal x', como se indica en la figura 7.6, es igual al momento centroidal de inercia más el cuadrado de la distancia *d* entre los dos ejes, multiplicado por el área *A*, lo cual se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{I_E = I_{x'} + d^2 A} \tag{7.20}$$

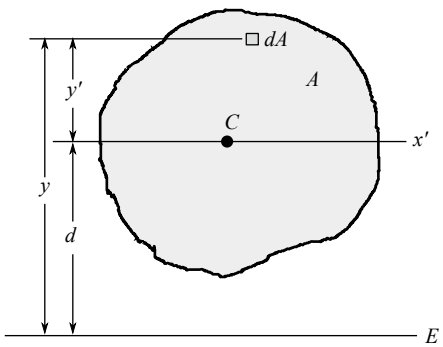


Figura 7.6

Para su demostración, considere el diferencial de área *dA*, de acuerdo con la figura 7.6, y dado que *y = (y' + d)*, como se muestra, por lo tanto, al sustituir en la ecuación del momento de inercia del área *A* con respecto al eje *E*, se tiene:

$$I_E = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \tag{1}$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA \qquad \int y' dA = 0 \qquad d^2 \int dA = d^2 A$$

Y al sustituir valores en la relación 1:

$$I_E = I_{x'} + d^2A$$

En la sección 7.3 se analizó que el momento de primer orden de un área A con respecto a un eje centroidal o $\int y'\,dA$ es igual a cero.

7.5.1 Ejemplo 7.1

En relación con el triángulo mostrado en la figura 7.7(a), hallar los momentos de inercia con respecto a su base o eje x y con respecto a su vértice o eje x_1.

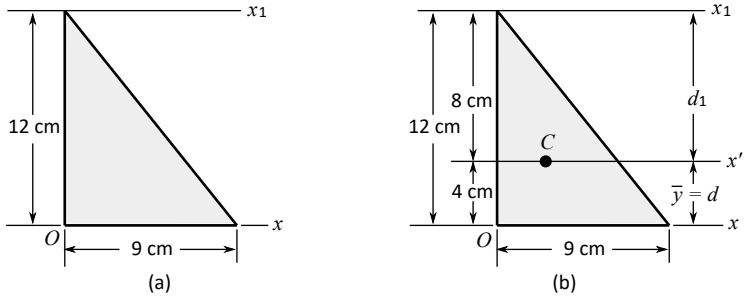


Figura 7.7

Solución

Se define la posición del centroide C y se calcula el momento centroidal de inercia, para lo cual la tabla 7.1 ofrece los siguientes valores, conforme a la figura 7.7(b), así:

$$\bar{y} = \frac{h}{3} = \frac{12\text{ cm}}{3} = 4\text{ cm} \qquad I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3 = \frac{1}{36}(9\text{ cm})(12\text{ cm})^3 = 432\text{ cm}^4$$

Para hallar el momento de inercia con respecto al eje x se aplica el teorema de los ejes paralelos, al sustituir valores correspondientes de acuerdo con la relación 7.20 y teniendo en cuenta que d = 4 cm, así:

$$I_x = I_{x'} + d^2A = 432\text{ cm}^4 + (4\text{ cm})^2\frac{1}{2}(9\text{ cm})(12\text{ cm}) = 1\,296\text{ cm}^4$$

Se puede obtener el mismo resultado al utilizar directamente la fórmula dada por la tabla 7.1, para el momento de inercia del área triangular con respecto a su base o eje x, así:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(9\text{ cm})(12\text{ cm})^3 = 1\,296\text{ cm}^4$$

Para encontrar el momento de inercia con respecto al eje x_1 se aplica también el teorema de los ejes paralelos, expresado mediante la relación 7.20, tomando $d_1 = 12\text{ cm} - \bar{y} = 8\text{ cm}$, como se aprecia en la figura 7.7(b), así:

$$I_{x1} = I_{x'} + d_1^2 A = 432 \text{ cm}^4 + (8 \text{ cm})^2 \frac{1}{2}(9 \text{ cm})(12 \text{ cm}) = 3\,888 \text{ cm}^4$$

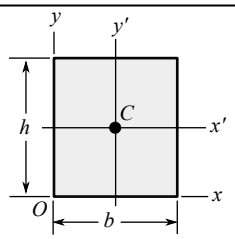
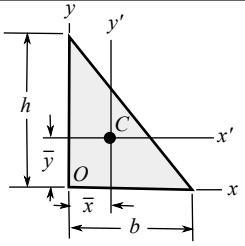
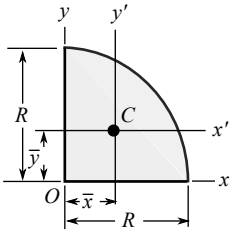
Los valores obtenidos son los siguientes:

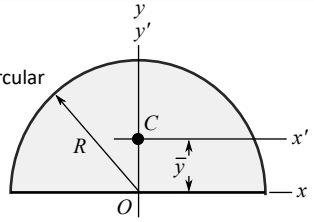
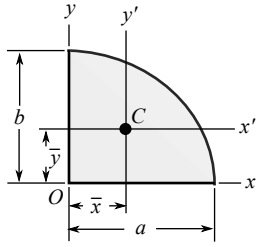
$$\boldsymbol{I_{x'} = 432 \text{ cm}^4} \qquad \boldsymbol{I_x = 1\,296 \text{ cm}^4} \qquad \boldsymbol{I_{x1} = 3\,888 \text{ cm}^4}$$

Nótese que el menor valor corresponde al momento centroidal de inercia, lo cual es consecuente con la aplicación del teorema de los ejes paralelos, quedando expresado el hecho de que el momento de inercia con respecto a un eje determinado aumenta a medida que aumenta también su distancia del eje centroidal, lo cual puede ser hacia arriba o hacia abajo, si se trata del eje centroidal x'.

Igualmente es válido también el hecho de que el momento de inercia aumenta, para un eje vertical cualquiera, a medida que se separa hacia la izquierda o hacia la derecha del eje centroidal y'.

Tabla 7.1

ÁREAS	CENTROIDES	MOMENTOS DE INERCIA
Área rectangular 	Área = bh	$Ix = \frac{1}{3} bh^3$ $Ix' = \frac{1}{12} bh^3$
Área triangular 	Área = $\frac{bh}{2}$ $\bar{x} = \frac{b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$Ix = \frac{1}{12} bh^3$ $Ix' = \frac{1}{36} bh^3$
Cuadrante de área circular 	Área = $\frac{\pi R^2}{4}$ $\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$	$Ix = Iy = \frac{\pi R^4}{16}$ $Ix' = Iy' = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) R^4$

ÁREAS	CENTROIDES	MOMENTOS DE INERCIA
Área semicircular 	Área = $\frac{\pi R^2}{2}$ $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$	$Ix = Iy = \frac{\pi R^4}{8}$ $Ix' = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4$
Cuadrante de área elíptica 	Área = $\frac{\pi ab}{4}$ $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$Ix = \frac{\pi ab^3}{16}$ $Iy = \frac{\pi a^3 b}{16}$ $Ix' = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)ab^3$ $Iy' = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)a^3 b$

7.5.2 Ejemplo 7.2

Determinar el momento de inercia del cuadrante de área circular de radio R, mostrado en la figura 7.8, con respecto al eje centroidal x', sabiendo que el momento de inercia relativo al eje x es $Ix = \pi R^4/16$, de acuerdo con la tabla 7.1.

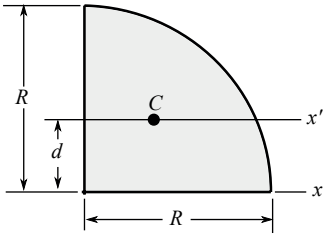


Figura 7.8

Solución

Al aplicar el teorema de los ejes paralelos dado mediante la relación 7.20:

$$I_x = I_{x'} + d^2 A \qquad I_{x'} = I_x - d^2 A$$

Al reemplazar valores, siendo $d = \bar{y} = 4R/3\pi$ y $A = \pi R^2/4$, también de acuerdo con la tabla 7.1, se obtiene:

$$I_{x'} = \frac{\pi R^4}{16} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \left(\frac{\pi R^2}{4}\right) = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) R^4 \qquad \boldsymbol{I_{x'} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) R^4}$$

7.6 Momento de inercia de áreas compuestas

El momento de inercia de un área A compuesta de varias áreas A_1, A_2, A_3, con respecto a un eje E, como se aprecia en la figura 7.9, se determina al sumar algebraicamente los momentos de inercia de cada una de las áreas individuales con respecto al mismo eje E, o sea:

$$I_E = (I_E)_{A1} + (I_E)_{A2} - (I_E)_{A3} \tag{7.21}$$

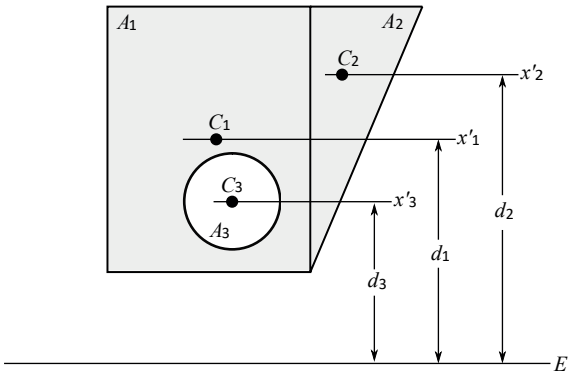


Figura 7.9

Nótese en la expresión 7.21 que el momento de inercia correspondiente a A_3 es negativo por tratarse de un agujero, y se debe tener en cuenta también que para aplicar el teorema de los ejes paralelos, dado mediante la relación 7.20, es necesario calcular las distancias desde los ejes centroidales de cada área hasta el eje E, como se indica en la figura 7.9.

Un procedimiento general para hallar los momentos de inercia de áreas compuestas, con respecto a los ejes x y y, consiste en:

1. Dividir el área compuesta en áreas conocidas.
2. Calcular cada una de las áreas y determinar la posición del centroide C de cada una de ellas y las distancias que los separan de los ejes x y y.
3. Hallar los momentos centroidales de cada una de las áreas.
4. Aplicar el teorema de los ejes paralelos para cada una de las áreas y sumar algebraicamente los momentos de inercia para cada eje requerido.
5. Organizar los datos en tablas como se indica en el ejemplo presentado a continuación.

7.6.1 Ejemplo 7.3

Un perfil en L está compuesto de dos rectángulos como se aprecia en la figura 7.10(a), con medidas dadas en centímetros (cm). Hallar los momentos de inercia del área compuesta: *a*) con respecto al eje *x*, *b*) con respecto al eje centroidal *x′* y *c*) con respecto al eje *x* utilizando el resultado obtenido en el numeral *b*. Comparar los resultados.

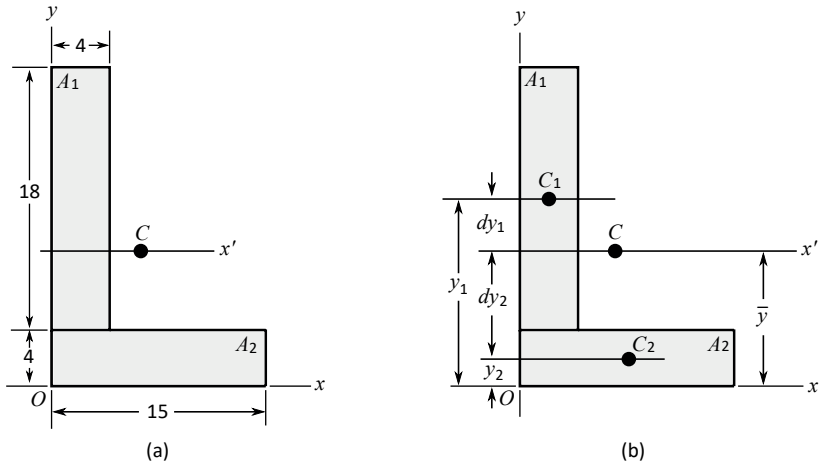


Figura 7.10

Solución (a)

Se divide el área compuesta en áreas conocidas y se establece el origen *O* del sistema *xy*, como punto de referencia, como se ilustra en la figura 7.10(b).

Se calcula cada una de las áreas y las respectivas distancias desde los centroides hasta el punto de referencia *O*, así:

$$A_1 = (4\text{ cm})(18\text{ cm}) = 72\text{ cm}^2 \qquad y_1 = 4\text{ cm} + 9\text{ cm} = 13\text{ cm}$$

$$A_2 = (15\text{ cm})(4\text{ cm}) = 60\text{ cm}^2 \qquad y_2 = 2\text{ cm}$$

Se determinan los momentos centroidales de inercia de cada una de las áreas, de acuerdo con las fórmulas ofrecidas en la tabla 7.1, como sigue:

$$(I_x)'_{A1} = \frac{(4\text{ cm})(18\text{ cm})^3}{12} = 1\,944\text{ cm}^4 \qquad (I_x)'_{A2} = \frac{(15\text{ cm})(4\text{ cm})^3}{12} = 80\text{ cm}^4$$

Se aplica el teorema de los ejes paralelos con respecto al eje *x* a cada una de las áreas mediante la siguiente ecuación, y se registran los datos en la tabla 7.2, según columnas 5, 6 y 7:

$$(I_x)_{Ai} = (I_x)'_{Ai} + y_i^2 A_i$$

Tabla 7.2

Áreas	A_i	y_i	y_iA_i	$y_i^2A_i$	$(I_x)'_{Ai}$	$(I_x)_{Ai}$
	cm²	cm	cm³	cm⁴	cm⁴	cm⁴
Rectángulo 1	72	13	936	12 168	1 944	14 112
Rectángulo 2	60	2	120	240	80	320
$\sum \boldsymbol{A_i} = \mathbf{132}\ \text{cm}^2$ $\quad \sum \boldsymbol{y_iA_i} = \mathbf{1\,056}\ \text{cm}^3$ $\quad \sum (\boldsymbol{I}\ )_{\boldsymbol{Ai}} = \mathbf{14\,432}\ \text{cm}^4$						

$$I_x = \sum (I_x)_{Ai} = 14\,432\ \text{cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_x = 14\,432}\ \text{cm}^4$$

Solución (b)

Se halla la posición del centroide del área compuesta, con base en los datos de las columnas 2, 3 y 4 de la tabla 7.2, así:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_iA_i}{A} = \frac{1\,056\ \text{cm}^3}{132\ \text{cm}^2} = 8\ \text{cm} \qquad \boldsymbol{\bar{y} = 8}\ \text{cm}$$

Se calculan las distancias relativas al centroide, conforme a la figura 7.10(b):

$$d_{y1} = (13\ \text{cm} - 8\ \text{cm}) = 5\ \text{cm} \qquad d_{y2} = (8\ \text{cm} - 2\ \text{cm}) = 6\ \text{cm}$$

Se aplica el teorema de los ejes paralelos para cada una de las áreas, con respecto al eje centroidal x', mediante la siguiente relación y se ordenan los datos de acuerdo con la tabla 7.3, en las columnas 4, 5 y 6, así:

$$(I_{x'})_{Ai} = (I_x)'_{Ai} + d_{yi}^2A_i$$

$$I_{x\prime} = \sum (I_{x'})_{Ai} = 5\,984\ \text{cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_{x'} = 5\,984}\ \text{cm}^4$$

Tabla 7.3

Áreas	A_i (cm²)	d_{yi} (cm²)	$d_{yi}^2A_i$ (cm⁴)	$(I_x)'A_i$ (cm⁴)	$(I_{x'})_{Ai}$ (cm⁴)
Rectángulo 1	72	5	1 800	1 944	3 744
Rectángulo 2	60	6	2 160	80	2 240
$\sum \boldsymbol{A_i} = \mathbf{132}\ \text{cm}^2$				$\sum (\boldsymbol{I_{x'}})_{\boldsymbol{Ai}} = \mathbf{5\,984}\ \text{cm}^4$	

Solución (c)

Se halla el momento de inercia con respecto al eje *x*, al aplicar el teorema de los ejes paralelos al área total, $A = 132\ \text{cm}^2$, así:

$$I_x = I_{x\prime} + \bar{y}^2A = 5\,984\ \text{cm}^4 + (8\ \text{cm})^2(132\ \text{cm}^2) = 14\,432\ \text{cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_x = 14\,432}\ \text{cm}^4$$

7.6.2 Ejemplo 7.4

Hallar el momento de inercia del área compuesta mostrada en la figura 7.11(a) con respecto a los ejes x y y.

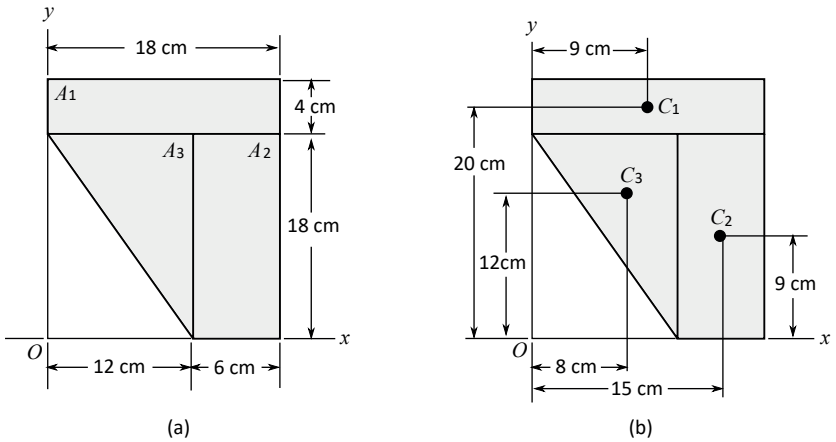


Figura 7.11

Solución

Se divide el área compuesta en áreas conocidas, se calculan las áreas y se establece el punto O como referencia para definir los centroides, como se indica en la figura 7.11(b).

$$A_1 = (18\text{ cm})(4\text{ cm}) = 72\text{ cm}^2 \qquad x_1 = 9\text{ cm} \qquad y_1 = 20\text{ cm}$$
$$A_2 = (6\text{ cm})(18\text{ cm}) = 108\text{ cm}^2 \qquad x_2 = 15\text{ cm} \qquad y_2 = 9\text{ cm}$$
$$A_3 = (12\text{ cm})(18\text{ cm})/2 = 108\text{ cm}^2 \qquad x_3 = 8\text{ cm} \qquad y_3 = 12\text{ cm}$$

Se hallan los momentos centroidales de inercia de cada una de las áreas al utilizar las relaciones dadas por la tabla 7.1 y se pasan los datos a la tabla 7.4.

$$(I_x)'_1 = \frac{(18\text{ cm})(4\text{ cm})^3}{12} = 96\text{ cm}^4 \quad (I_y)'_1 = \frac{(4\text{ cm})(18\text{ cm})^3}{12} = 1\,944\text{ cm}^4$$
$$(I_x)'_2 = \frac{(6\text{ cm})(18\text{ cm})^3}{12} = 2\,916\text{ cm}^4 \quad (I_y)'_2 = \frac{(18\text{ cm})(6\text{ cm})^3}{12} = 324\text{ cm}^4$$
$$(I_x)'_3 = \frac{(12\text{ cm})(18\text{ cm})^3}{36} = 1\,944\text{ cm}^4 \quad (I_y)'_3 = \frac{(18\text{ cm})(12\text{ cm})^3}{36} = 864\text{ cm}^4$$

Tabla 7.4

Áreas	A_i	y_i	$y_i^2 A_i$	$(I_x)'_{Ai}$	$(I_x)_{Ai}$	x_i	$x_i^2 A_i$	$(I_y)'_{Ai}$	$(I_y)_{Ai}$
	cm^2	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm	cm^4	cm^4	cm^4
Rectángulo 1	72	20	28 800	96	28 896	9	5 832	1 944	7 776
Rectángulo 2	108	9	8 748	2 916	11 664	15	24 300	324	24 624
Triángulo	108	12	15 552	1 944	17 496	8	6 912	864	7 776
$\sum A_i = \mathbf{288}\ cm^2$			$\sum (I_x)_{Ai} = \mathbf{58\,056}\ cm^4$				$\sum (I_y)_{Ai} = \mathbf{40\,176}\ cm^4$		

$$I_x = \sum (I_x)_{Ai} = 58\,056\ \text{cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_x = 58\,056\ cm^4}$$
$$I_y = \sum (I_y)_{Ai} = 40\,176\ \text{cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_y = 40\,176\ cm^4}$$

Solución opcional (primera)

Una solución opcional consiste en dividir el área compuesta en dos áreas como se indica en la figura 7.12 y en calcular las áreas y las distancias de los centroides a los ejes dados x y y, así:

$$A_1 = (18\ \text{cm})(22\ \text{cm}) = 396\ \text{cm}^2 \qquad x_1 = 9\ \text{cm} \qquad y_1 = 11\ \text{cm}$$
$$A_2 = (12\ \text{cm})(18\ \text{cm})/2 = 108\ \text{cm}^2 \qquad x_2 = 4\ \text{cm} \qquad y_2 = 6\ \text{cm}$$

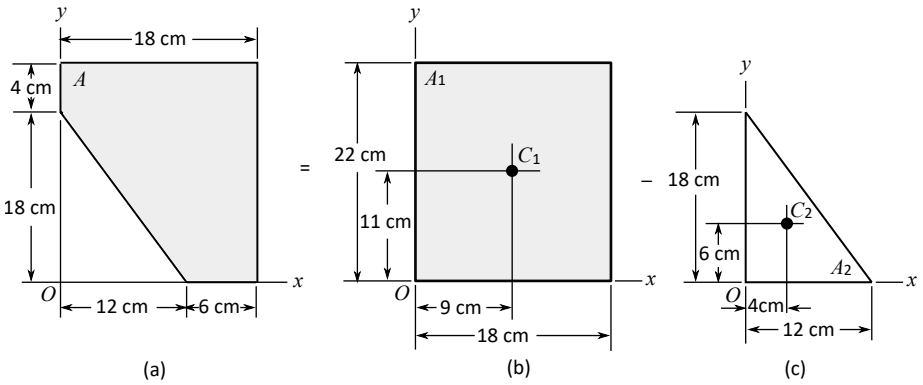


Figura 7.12

Se hallan los momentos centroidales de inercia y se ordenan los datos en la tabla 7.5, teniendo en cuenta que el área del triángulo se considera negativa, así:

$$(I_x)'_1 = \frac{(18\text{ cm})(22\text{ cm})^3}{12} = 15\,972\text{ cm}^4$$

$$(I_y)'_1 = \frac{(22\text{ cm})(18\text{ cm})^3}{12} = 10\,692\text{ cm}^4$$

$$(I_x)'_2 = \frac{(12\text{ cm})(18\text{ cm})^3}{36} = 1\,944\text{ cm}^4$$

$$(I_y)'_2 = \frac{(18\text{ cm})(12\text{ cm})^3}{36} = 864\text{ cm}^4$$

Tabla 7.5

Áreas	A_i	y_i	$y_i^2 A_i$	$(I_x)'_{Ai}$	$(I_x)_{Ai}$	x_i	$x_i^2 A_i$	$(I_y)'_{Ai}$	$(I_y)_{Ai}$
	cm²	cm	cm⁴	cm⁴	cm⁴	cm	cm⁴	cm⁴	cm⁴
Rectángulo	396	11	47 196	15 972	63 888	9	32 076	10 692	42 768
Triángulo	−108	6	3 888	1 944	−5 832	4	1 728	864	−2 592
$\sum \boldsymbol{A_i} = \mathbf{288}\text{ cm}^2$				$\sum (\boldsymbol{I_x})_{Ai} = \mathbf{58\,056}\text{ cm}^4$				$\sum (\boldsymbol{I_y})_{Ai} = \mathbf{40\,176}\text{ cm}^4$	

$$I_x = \sum (I_x)_{Ai} = 58\,056\text{ cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_x} = \mathbf{58\,056}\text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum (I_y)_{Ai} = 40\,176\text{ cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_y} = \mathbf{40\,176}\text{ cm}^4$$

Solución opcional (segunda)

La segunda solución opcional consiste en descomponer el área como se muestra en la figura 7.12 y obtener directamente los momentos de inercia de cada una, con respecto a los ejes *x* y *y*, con base en los datos de la tabla 7.1, sin aplicar el teorema de los ejes paralelos, así:

$$(I_x)_1 = (18\text{ cm})(22\text{ cm})^3/3 = 63\,888\text{ cm}^4$$

$$(I_x)_2 = (12\text{ cm})(18\text{ cm})^3/12 = 5\,832\text{ cm}^4$$

$$I_x = (I_x)_1 - (I_x)_2 = 63\,888\text{ cm}^4 - 5\,832\text{ cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_x} = \mathbf{58\,056}\text{ cm}^4$$

$$(I_y)_1 = (22\text{ cm})(18\text{ cm})^3/3 = 42\,768\text{ cm}^4$$

$$(I_y)_2 = (18\text{ cm})(12\text{ cm})^3/12 = 2\,592\text{ cm}^4$$

$$I_y = (I_y)_1 - (I_y)_2 = 42\,768\text{ cm}^4 - 2\,592\text{ cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_y} = \mathbf{40\,176}\text{ cm}^4$$

7.6.3 Ejemplo 7.5

Dos perfiles de referencias según la norma europea UPN 100,[1] como se muestra en la figura 7.13(a), son usados para formar un nuevo perfil en forma de I, como se indica en la figura 7.13(b). Hallar los momentos de inercia, módulos resistentes y radios de giro, de la nueva sección, respecto de los ejes centroidales.

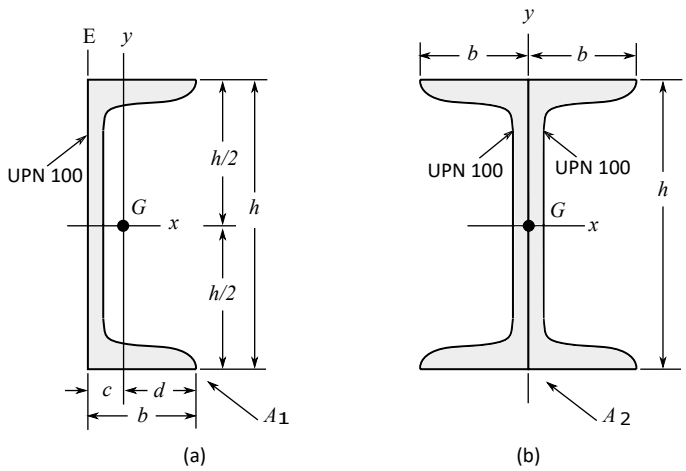


Figura 7.13

Solución

Las propiedades de la sección UPN 100, denominada A_1, mostrada en la figura 7.13(a), están dadas así:

$$A_1 = 13.5\ \text{cm}^2 \quad h = 10\ \text{cm} \quad b = 5\ \text{cm} \quad c = 1.55\ \text{cm}$$
$$(I_x)_{A1} = 206\ \text{cm}^4 \quad (W_x)_{A1} = 41.2\ \text{cm}^3 \quad (k_x)_{A1} = 3.91\ \text{cm}$$
$$(I_y)_{A1} = 29.3\ \text{cm}^4 \quad (W_y)_{A1} = 8.49\ \text{cm}^3 \quad (k_y)_{A1} = 1.47\ \text{cm}$$

Se define el módulo resistente W de una sección, como el cociente entre el momento de inercia con respecto a un eje y la distancia del borde de la sección más alejada de dicho eje. Por tanto, para el caso de la sección A_1, los datos han sido calculados así:

1 Véanse las tablas 2.A1.4, 2.A1.7 y 2.A1.1 de "Algunas tablas de propiedades de secciones". Tablas de perfiles laminados según norma europea. Escuela de Ingenierías Industriales (sitio web). Material para el curso de Introducción a la Resistencia de Materiales, Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Valladolid, España. Recuperada de https://www.eii.uva.es/reic/RMgrado/docs_varios/tablas_perfiles.pdf (consultada en 2021).

$$(W_x)_{A1} = \frac{I_x}{h/2} = 41.2 \text{ cm}^3 \qquad (W_y)_{A1} = \frac{I_y}{d} = \frac{I_y}{(b-c)} = 8.49 \text{ cm}^3$$

Siendo $h/2 = 5$ cm la distancia más alejada desde el eje x hasta el borde de la sección y $d = (b - c) = (5 \text{ cm} - 1.55 \text{ cm}) = 3.45$ cm la distancia más alejada desde el eje y hasta el borde de la sección, como se ilustra en la figura 7.13(a). Al aplicar las relaciones 7.17, se calculan los radios de giro, $(k_x)_{A1}$ y $(k_y)_{A1}$, así:

$$(k_x)_{A1} = \sqrt{\frac{(I_x)_{A1}}{A_1}} = 3.91 \text{ cm} \qquad (k_y)_{A1} = \sqrt{\frac{(I_y)_{A1}}{A_1}} = 1.47 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta la nueva sección conformada como se muestra en la figura 7.13(b), denominada $A_2 = 2(A_1) = 2(13.5 \text{ cm}^2) = (27 \text{ cm}^2)$, sus propiedades son:

$$(I_x)_{A2} = 2(I_x)_{A1} = 2(206 \text{ cm}^4) = 412 \text{ cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_x = 412 \text{ cm}^4}$$

$$(W_x)_{A2} = \frac{(I_x)_{A2}}{\frac{h}{2}} = \frac{(412 \text{ cm}^4)}{5 \text{ cm}} = 82.4 \text{ cm}^3 \qquad \boldsymbol{W_x = 82.4 \text{ cm}^3}$$

$$(k_x)_{A2} = \sqrt{\frac{(I_x)_{A2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{412 \text{ cm}^4}{27 \text{ cm}^2}} = 3.91 \text{ cm} \qquad \boldsymbol{k_x = 3.91 \text{ cm}}$$

Se halla ahora el momento de inercia de A_1 respecto del eje E, según la figura 7.13(a), para determinar el momento de inercia de A_2 respecto del eje y, así:

$$(I_E)_{A1} = (I_y)_{A1} + c^2 A_1 = 29.3 \text{ cm}^4 + (1.55 \text{ cm})^2(13.5 \text{ cm}^2) = 61.73 \text{ cm}^4$$

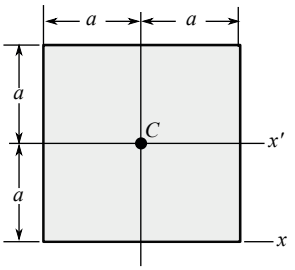
$$(I_y)_{A2} = 2(I_E)_{A1} = 2(61.73 \text{ cm}^4) = 123.46 \text{ cm}^4 \qquad \boldsymbol{I_y = 123.46 \text{ cm}^4}$$

$$(W_y)_{A2} = \frac{(I_y)_{A2}}{b} = \frac{123.46 \text{ cm}^4}{5 \text{ cm}} = 24.69 \text{ cm}^3 \qquad \boldsymbol{W_y = 24.69 \text{ cm}^3}$$

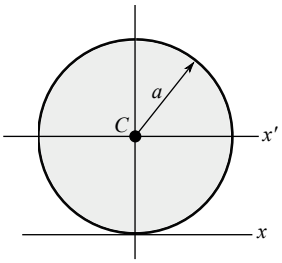
$$(k_y)_{A2} = \sqrt{\frac{(I_y)_{A2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{123.46 \text{ cm}^4}{27 \text{ cm}^2}} = 2.13 \text{ cm} \qquad \boldsymbol{k_y = 2.13 \text{ cm}}$$

7.7 Problemas propuestos

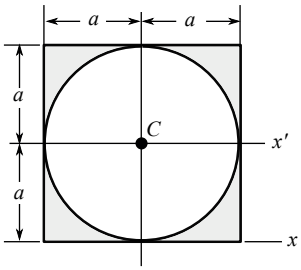
Problemas 7.1 hasta 7.6. Para cada una de las áreas compuestas, determinar los momentos de inercia con respecto al eje centroidal x' y con respecto al eje x, como se indica en las correspondientes figuras.



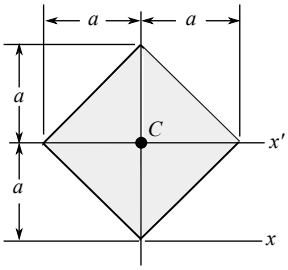
Problema 7.1



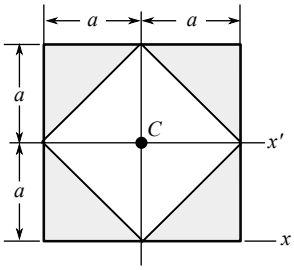
Problema 7.2



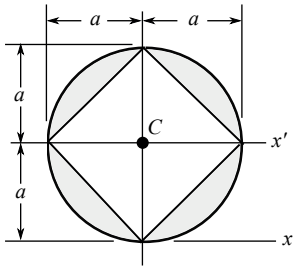
Problema 7.3



Problema 7.4

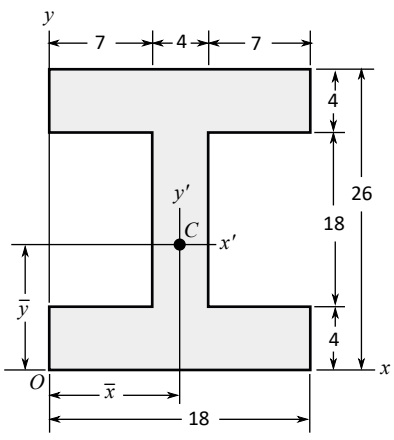


Problema 7.5

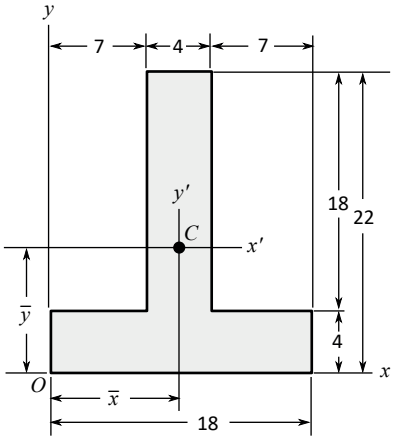


Problema 7.6

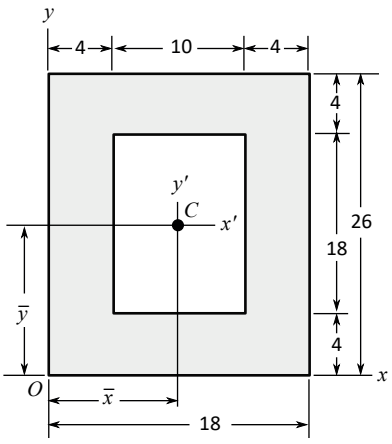
Problemas 7.7 hasta 7.12. En relación con cada perfil sombreado como se indica en las figuras, cuyas medidas están dadas en centímetros (cm), hallar las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ correspondientes al centroide *C* y los momentos centroidales de inercia.



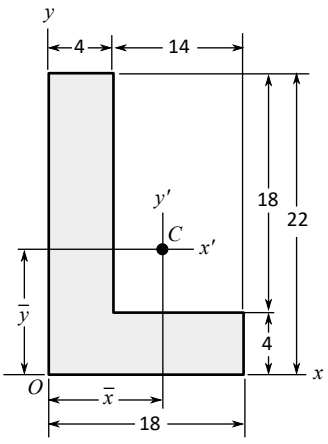
Problema 7.7



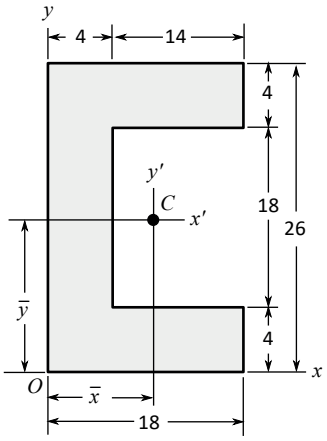
Problema 7.8



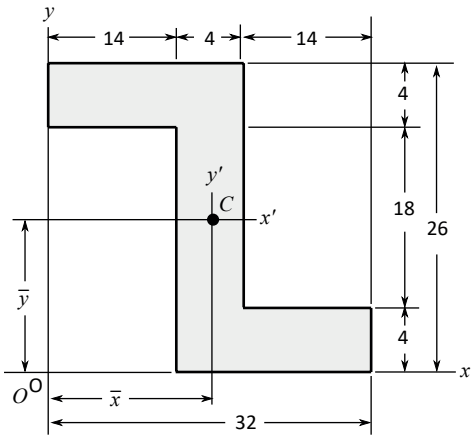
Problema 7.9



Problema 7.10

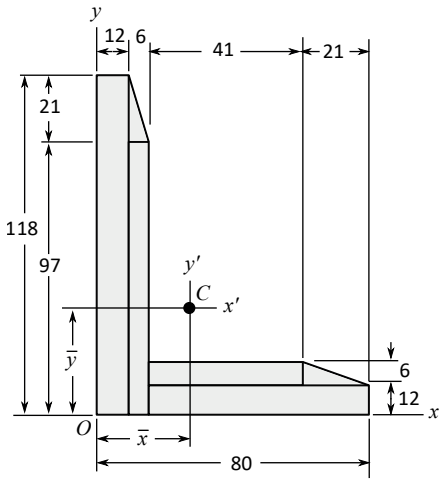


Problema 7.11

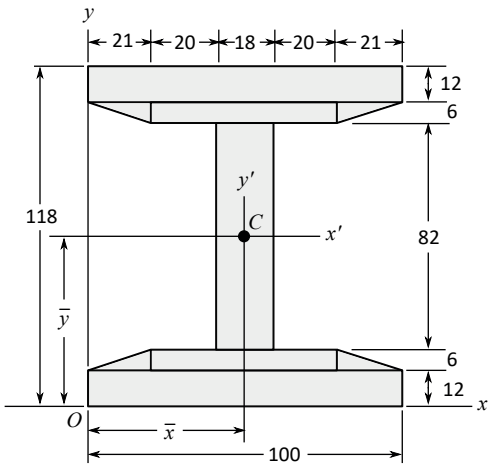


Problema 7.12

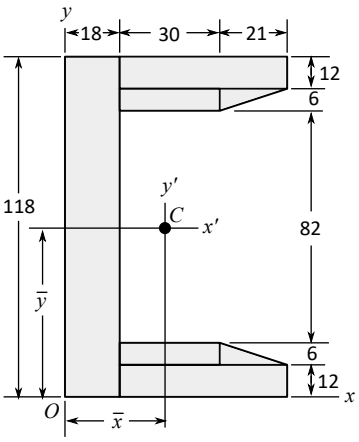
Problemas 7.13 hasta 7.16. En relación con cada perfil sombreado como se indica en las figuras, con medidas dadas en centímetros (cm), hallar las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ correspondientes al centroide C y los momentos centroidales de inercia.



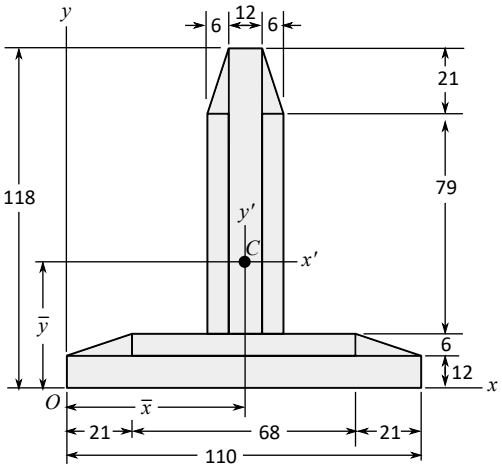
Problema 7.13



Problema 7.14



Problema 7.15

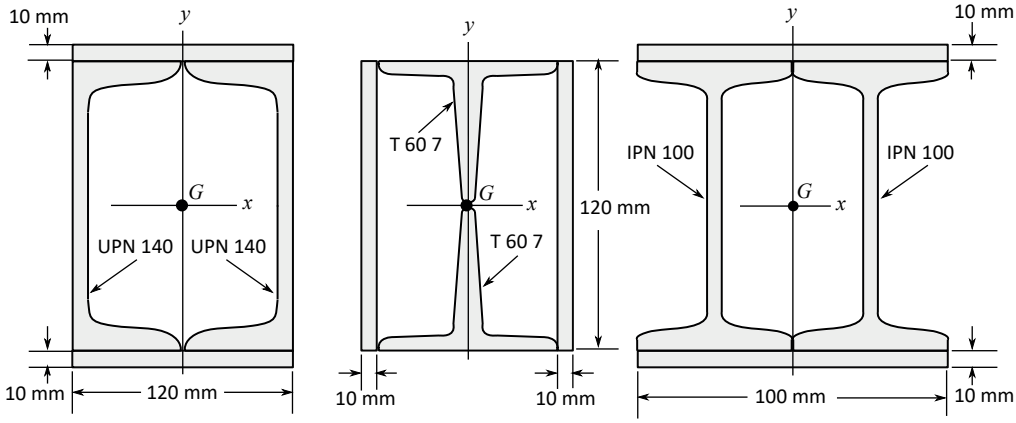


Problema 7.16

Problema 7.17. El perfil mostrado está compuesto de dos perfiles según la norma europea UPN 140 y dos platinas de 10 × 120 mm, como se indica en la figura. Hallar los momentos de inercia, módulos resistentes y radios de giro, de la nueva sección, respecto de los ejes centroidales.

Problema 7.18. El perfil mostrado está compuesto de dos perfiles según la norma europea T 60 7 y dos platinas de 10 × 120 mm, como se indica en la figura. Hallar los momentos de inercia, módulos resistentes y radios de giro, de la nueva sección, respecto de los ejes centroidales.

Problema 7.19. El perfil mostrado está compuesto de dos perfiles según la norma europea IPN 100 y dos platinas de 10 × 100 mm, como se indica en la figura. Hallar los momentos de inercia, módulos resistentes y radios de giro, de la nueva sección, respecto de los ejes centroidales.



Problema 7.17 Problema 7.18 Problema 7.19

Diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores en vigas

8

Objetivos del capítulo

- Estudiar las vigas estáticamente determinadas, como elementos prismáticos, las fuerzas aplicadas y las reacciones en los apoyos.
- Establecer las relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector en una viga.
- Analizar los diferentes tipos de cargas aplicadas a una viga y expresarlas en forma de funciones de singularidad.
- Dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores y calcular mediante ecuaciones los respectivos valores en determinados puntos de la viga.

8.1 Introducción

Para simplificar su estudio, las *vigas* se pueden definir como elementos prismáticos, o sea, de sección transversal constante, largos y rectos, que se utilizan como piezas estructurales, para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento.

Por la acción de dichas cargas, se encuentran sometidas a ciertos esfuerzos, relacionados con las fuerzas cortantes y los momentos flectores, por lo cual resulta importante calcular en determinados puntos sus magnitudes como un primer paso para el diseño de la viga. La elaboración de los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores constituye la herramienta fundamental para conocer, en cualquier punto deseado, sus valores.

8.2 Tipos de cargas y de apoyos en vigas

Las cargas aplicadas a una viga pueden ser: puntuales, como la fuerza de magnitud *P* de la viga *AB*, mostrada en la figura 8.1, distribuidas, *w*, o una combinación de las anteriores.

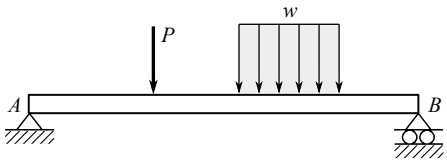


Figura 8.1

De acuerdo con la figura 8.2, las vigas pueden contar con los siguientes tipos de apoyos:

a. Viga apoyada en los extremos.
b. Viga apoyada en dos puntos con un tramo en voladizo.
c. Viga apoyada en tres o más puntos o viga continua.
d. Viga empotrada en un extremo o en voladizo.
e. Viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro.
f. Viga empotrada en los extremos.

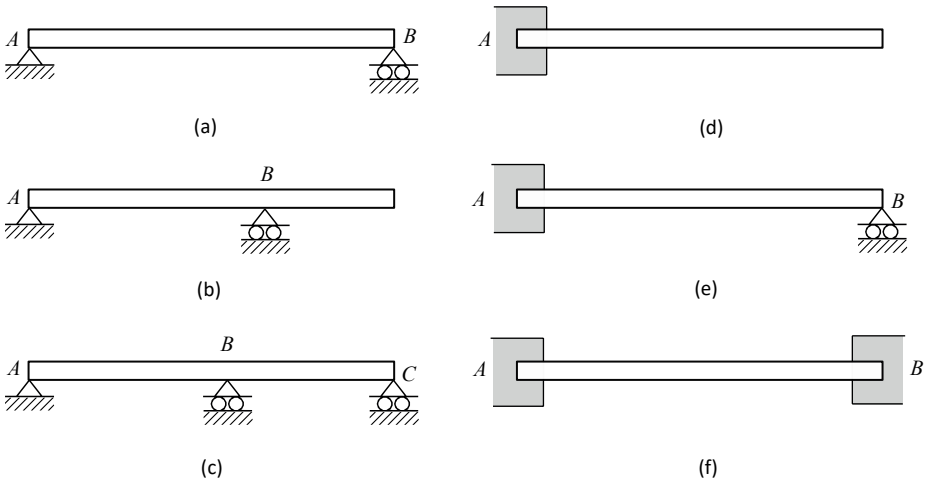


Figura 8.2

Se observa que las vigas mostradas en las figuras 8.2(a), 8.2(b) y 8.2(d) se consideran estáticamente determinadas, porque las reacciones en los apoyos ofrecen como máximo tres incógnitas. En cambio, las presentadas en las figuras 8.2(c), 8.2(e) y 8.2(f) se clasifican como estáticamente indeterminadas, porque las incógnitas ofrecidas son más de tres, lo cual implica que su solución no es posible desde el punto de vista de la estática.

8.3 Fuerza cortante y momento flector

De acuerdo con las cargas aplicadas a una viga, como se ilustra en la figura 8.3(a), al realizar cortes en determinados puntos, como en el indicado en la figura 8.3(b), es posible determinar, mediante ecuaciones de equilibrio, la fuerza cortante V y el momento flector M aplicados.

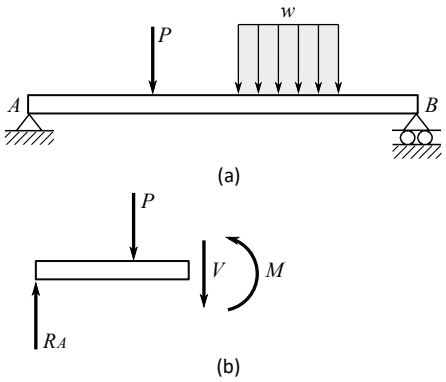


Figura 8.3

8.4 Convención de signos

Con el fin de calcular sin ambigüedades los valores de la fuerza cortante V y el momento flector M en un punto determinado de una viga, se ha establecido la convención de signos expresada a continuación:

— El momento flector M en un punto determinado se considera positivo cuando las fuerzas externas que actúan sobre la viga tienden a doblarla, en dicho punto, de forma cóncava hacia arriba, como se indica en la figura 8.4(a), y se toma como negativo cuando la flexión causada presenta concavidad hacia abajo, como se muestra en la figura 8.4(b).

— La fuerza cortante V en cualquier punto se toma como positiva cuando las fuerzas externas aplicadas sobre la viga tienden a cortarla, en ese punto, en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 8.4(c), y se considera negativa cuando el corte ocurre en el sentido contrario, como se aprecia en la figura 8.4(d).

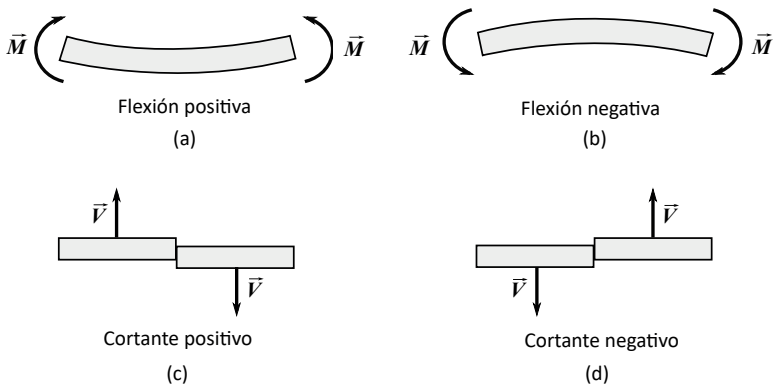


Figura 8.4

8.5 Diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores

Una vez se tengan definidos los valores de la fuerza cortante V y del momento flector M, en determinados puntos de interés, a lo largo de la viga, se facilitan los cálculos si se realizan dos diagramas, uno denominado de *fuerzas cortantes,* al graficar los valores de V en relación con la distancia x, o longitud de la viga, y el otro de *momentos flectores,* al registrar los valores de M también respecto a la longitud x de la viga, los cuales muestran el comportamiento en forma gráfica de cada una de las variables, fuerzas cortantes y momentos flectores, en función de la distancia x. El ejemplo desarrollado a continuación ilustra el procedimiento para obtener dichas gráficas.

8.5.1 Ejemplo 8.1

Una carga de 30 kN es aplicada a la viga *ABC*, como se aprecia en la figura 8.5(a). Determinar mediante el método de cortes las ecuaciones correspondientes a las fuerzas cortantes y momentos flectores y sus respectivos diagramas.

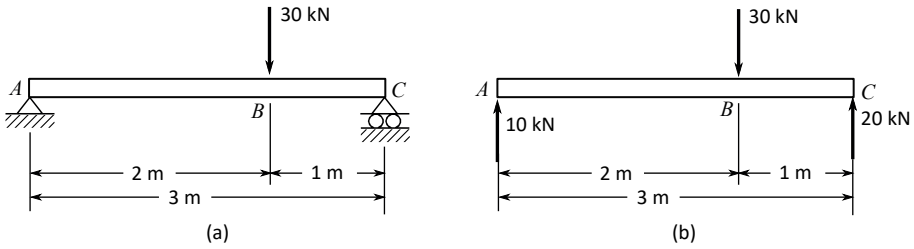


Figura 8.5

Solución

Se realiza el diagrama de cuerpo libre de la viga *ABC*, mostrado en la figura 8.5(b), y se hallan las magnitudes de las reacciones en los puntos *A* y *C*, dados por $A = 10$ kN y $C = 20$ kN.

Para aplicar el método de cortes a la viga *ABC*, como se ilustra en la figura 8.5(b), se divide en dos tramos *AB* y *BC*, se secciona cada uno de ellos y se realizan los análisis de fuerzas y de momentos, en relación con la variable *x*, con el fin de obtener sus ecuaciones y los consecuentes diagramas, como se verá a continuación.

Se efectúa un corte entre los puntos *A* y *B*, a una distancia *x* desde el punto *A*, siendo ($0 < x < 2$ m), de acuerdo con la figura 8.6(a), y al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se halla:

$$\sum F_v + \uparrow = 0: \ 10 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 10 \text{ kN} \tag{1}$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0: \ M - (10 \text{ kN})(x) = 0 \quad M = 10 \text{ kN}(x) \tag{2}$$

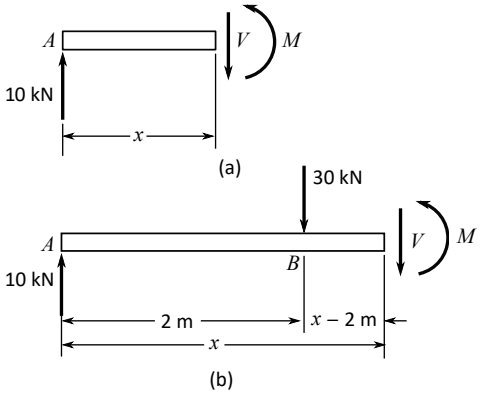


Figura 8.6

Se realiza otro corte entre los puntos B y C, a una distancia x desde el punto A, siendo (2 m < x < 3 m), como se aprecia en la figura 8.6(b), y de acuerdo con las ecuaciones de equilibrio, se tiene:

$$\sum F_v + \uparrow = 0:\ 10\ \text{kN} - 30\ \text{kN} - V = 0 \qquad V = -20\ \text{kN} \tag{3}$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0:\ M - (10\ \text{kN})(x) + (30\ \text{kN})(x - 2\ \text{m}) = 0$$

$$M = (10\ \text{kN})(x) - (30\ \text{kN})(x - 2\ \text{m}) = 0 \tag{4}$$

Al analizar la ecuación 1, correspondiente a la fuerza cortante V, se observa que entre los puntos A y B la fuerza cortante presenta un valor constante de 10 kN, por tanto, se dibuja una línea recta horizontal, como se aprecia en el diagrama de la figura 8.7(a), y además, debido a que la ecuación 3, dada entre los puntos B y C, ofrece también un valor constante, de −20 kN, se traza otra línea recta horizontal. El punto B presenta un salto de valor, de 10 kN hasta −20 kN, que indica la presencia de la fuerza de −30 kN en dicho punto.

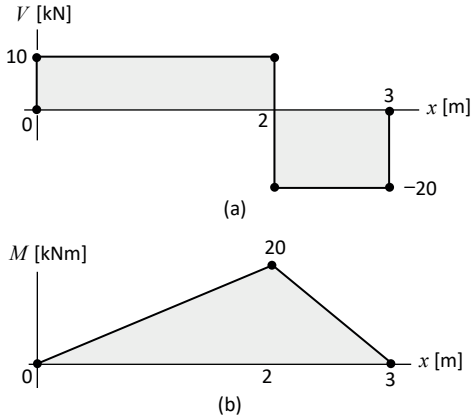


Figura 8.7

En cuanto a la ecuación 2, perteneciente al momento M entre los puntos A y B, M = 10 kN(x), describe una recta con pendiente m = 10 kN, como se muestra en la figura 8.7(b), aunque entre los puntos B y C, de acuerdo con la ecuación 4, se trata de una recta con pendiente m = 10 kN − 30 kN = −20 kN.

8.6 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector

Establecer las relaciones entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector en una viga resulta de gran utilidad para dibujar los respectivos diagramas, como se verá a continuación.

Considere una viga *AF* sometida a un sistema general de carga distribuida *w*, entre los puntos *B* y *D*, como se muestra en la figura 8.8 (a), y se toma en el punto *C* un diferencial de carga *w* de ancho *dx* a una distancia *x* desde el punto *A*, representado como se indica en la figura 8.8 (b).

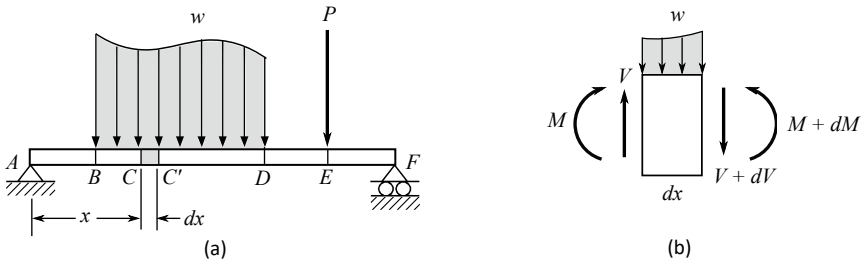


Figura 8.8

Al realizar la sumatoria de fuerzas verticales, se tiene:

$$\sum F_v + \uparrow = 0: \; V - w(dx) - (V + dV) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{8.1}$$

Al despejar, $dV = -wdx$ e integrar entre los puntos *B* y *D*:

$$\int_B^D dV = V_D - V_B = -\int_B^D w dx$$

$$V_D - V_B = -(\text{área bajo la curva de carga entre } B \text{ y } D)$$

La anterior expresión muestra que la diferencia de la fuerza cortante entre dos puntos *B* y *D* es igual al valor negativo del área bajo la curva de carga, en donde el signo indica el sentido de la carga distribuida hacia abajo. Al tomar ahora suma de momentos:

$$\sum M + \circlearrowleft = 0: \; -M - wdx\left(\frac{dx}{2}\right) - (V + dV)dx + M + dM = 0$$

Despreciando los términos con productos de diferenciales, se tiene:

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{8.2}$$

Al despejar, $dM = Vdx$, e integrar nuevamente entre los puntos *B* y *D*:

$$\int_B^D dM = M_D - M_B = \int_B^D V dx$$

$$M_D - M_B = (\text{área bajo la curva de cortante entre } B \text{ y } D)$$

Mostrando el hecho de que la diferencia de momentos entre dos puntos *B* y *D* es igual al área bajo la curva del cortante entre dichos puntos.

8.7 Funciones de singularidad y diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores

Las *funciones de singularidad* son expresiones que representan funciones discontinuas, y como tales resultan adecuadas para describir las relaciones existentes entre las fuerzas cortantes y los momentos flectores, con la longitud *x* correspondiente a la viga. Constituyen por tanto una herramienta para representar en forma de ecuaciones los diagramas de cortantes y de momentos.

En los ejemplos presentados a continuación se mostrarán los procedimientos para obtener las ecuaciones de cortantes y de momentos con sus respectivos diagramas, desarrollados por cortes y también por medio de las funciones de singularidad con el fin de analizar las ventajas de utilizar uno u otro método.

8.7.1 Ejemplo 8.2

Hallar las ecuaciones relacionadas con las fuerzas cortantes y momentos flectores y sus correspondientes diagramas, relativos a la viga *ABCDE* cargada como se indica en la figura 8.9(a).

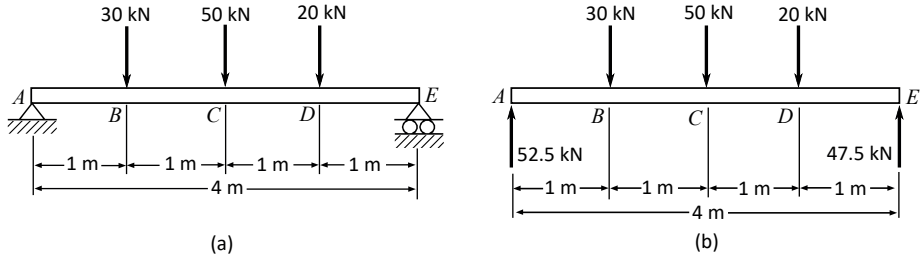


Figura 8.9

Solución

Inicialmente se elabora un diagrama de cuerpo libre de la viga *ABCDE* y se hallan los valores de las reacciones en los puntos *A* y *E*, dados por $A = 52.5$ kN y $E = 47.5$ kN, como se observa en la figura 8.9(b). Se realizan los siguientes cortes a una distancia *x* desde el punto *A* y se aplican las ecuaciones de equilibrio.

Corte 1. Intervalo ($0 < x < 1$ m), entre los puntos *A* y *B*, de acuerdo con la figura 8.10(a).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: \ 52.5 \text{ kN} - V = 0 \qquad V = 52.5 \text{ kN}$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0: \ M - (52.5 \text{ kN})(x) = 0$$

$$M = 52.5 \text{ kN}(x) \tag{1}$$

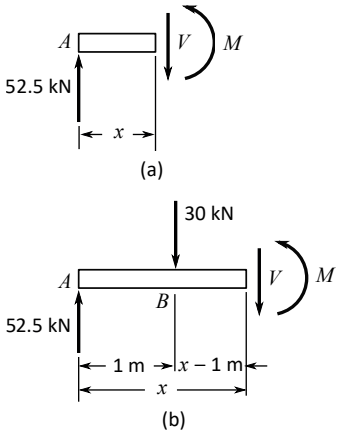


Figura 8.10

Corte 2. Intervalo ($1 \text{ m} < x < 2$ m), entre los puntos *B* y *C*, conforme a la figura 8.10(b).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: \ 52.5 \text{ kN} - 30 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 22.5 \text{ kN}$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0: \ M - (52.5 \text{ kN})(x) + (30 \text{ kN})(x - 1) = 0$$

$$M = 52.5 \text{ kN}(x) - 30 \text{ kN}(x - 1) \tag{2}$$

Corte 3. Intervalo ($2 \text{ m} < x < 3$ m), entre los puntos *C* y *D*, como se ilustra en la figura 8.11(a).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: \ 52.5 \text{ kN} - 30 \text{ kN} - 50 \text{ kN} - V = 0 \quad V = -27.5 \text{ kN}$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0: \ M - 52.5 \text{ kN}(x) + 30 \text{ kN}(x - 1) + 50 \text{ kN}(x - 2) = 0$$

$$M = 52.5 \text{ kN}(x) - 30 \text{ kN}(x - 1) - 50 \text{ kN}(x - 2) \tag{3}$$

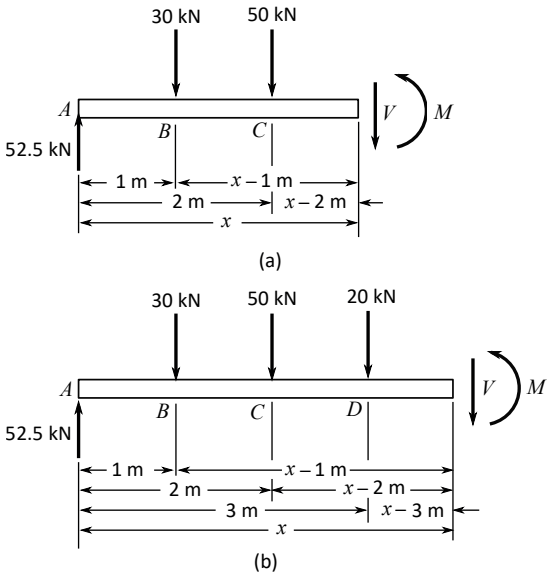


Figura 8.11

Corte 4. Intervalo (3 m < x < 4 m), entre los puntos D y E, como se indica en la figura 8.11(b).

$$\sum F_v + \uparrow = 0:\ 52.5\ \text{kN} - 30\ \text{kN} - 50\ \text{kN} - 20\ \text{kN} - V = 0 \qquad V = -47.5\ \text{kN}$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0:\ M - 52.5\ \text{kN}(x) + 30\ \text{kN}(x-1) + 50\ \text{kN}(x-2) + 20\ \text{kN}(x-3) = 0$$

$$M = 52.5\ \text{kN}(x) - 30\ \text{kN}(x-1) - 50\ \text{kN}(x-2) - 20\ \text{kN}(x-3) \qquad (4)$$

Con base en la información obtenida mediante las anteriores ecuaciones de V y M, se elaboran los diagramas mostrados en la figura 8.12.

Se observa que la ecuación 4 correspondiente a momentos M para el corte 4, aunque ha sido calculada solo para el intervalo (3 m < x < 4 m), es válida también para los anteriores cortes, si se hace la salvedad en el sentido de no tomar los valores negativos que resulten de las operaciones entre paréntesis, o sea, la ecuación es válida para un determinado valor de x, siempre que se tomen dichas operaciones con resultados positivos y se descarten los negativos.

Por ejemplo, si se trata de determinar valores del primer corte, en donde (0 < x < 1 m), se utiliza la ecuación 4 al descartar los valores de los paréntesis (x — 1), (x — 2) y (x — 3) por presentar valores negativos, por tanto, la ecuación resultante una vez ajustada será:

$$\text{M} = 52.5\ \text{kN}\ (x)$$

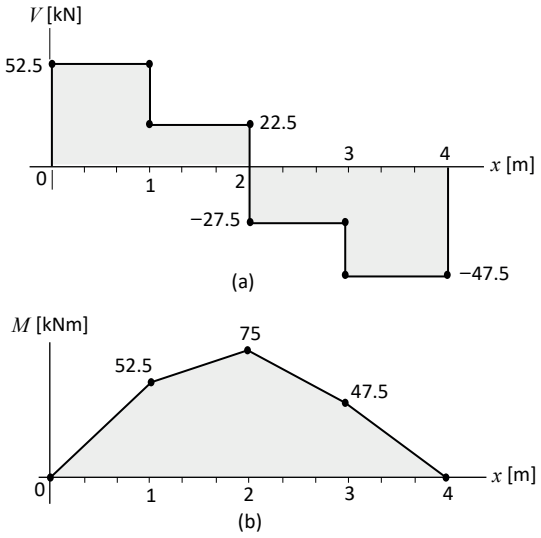


Figura 8.12

Entonces, bajo esas condiciones la ecuación 4 se convierte en una función de singularidad y para tener en cuenta el hecho de que las operaciones entre paréntesis no pueden tomar valores negativos sino positivos o cero, en su forma general, se escribe con paréntesis angulares, así:

$$M = 52.5\ \text{kN}\langle x\rangle - 30\ \text{kN}\langle x-1\rangle - 50\ \text{kN}\langle x-2\rangle - 20\ \text{kN}\langle x-3\rangle \tag{5}$$

Las funciones de singularidad se pueden derivar o integrar, y por lo tanto permiten deducir entre sí las ecuaciones de carga, de cortante o de momento si se cuenta con una de ellas al aplicar las relaciones 8.1 y 8.2, dadas por:

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad \frac{dM}{dx} = V$$

Por ejemplo, si se escribe de manera conveniente la ecuación 5 correspondiente a momentos:

$$M_{(x)} = 52.5\ \text{kN}\langle x\rangle^1 - 30\ \text{kN}\langle x-1\rangle^1 - 50\ \text{kN}\langle x-2\rangle^1 - 20\ \text{kN}\langle x-3\rangle^1 \tag{6}$$

Se puede obtener la de cortantes al derivar, así:

$$V_{(x)} = 52.5\ \text{kN}\langle x\rangle^0 - 30\ \text{kN}\langle x-1\rangle^0 - 50\ \text{kN}\langle x-2\rangle^0 - 20\ \text{kN}\langle x-3\rangle^0 \tag{7}$$

Las dos ecuaciones anteriores permiten hallar el valor del momento $M_{(x)}$ o del cortante $V_{(x)}$, para cualquier valor de x, aunque al tratarse de funciones de singularidad, los

paréntesis angulares son sustituidos por paréntesis regulares cuando se tiene la certeza de que sus resultados son ceros o positivos, por ejemplo, al calcular el momento $M_{(x)}$, para x = 2 m, la ecuación 6 se convierte en:

$$M_{(2)} = 52.5\ \text{kN}(2\ \text{m})^1 - 30\ \text{kN}(1\ \text{m})^1 - 50\ \text{kN}(0)^1 = 75\ \text{kNm}$$

Para el caso de determinar el valor del cortante $V_{(x)}$, si x = 1.5 m, la ecuación 7 se expresa como sigue:

$$V_{(1.5)} = 52.5\ \text{kN}(1.5)^0 - 30\ \text{kN}(0.5)^0 = 52.5\ \text{kN} - 30\ \text{kN} = 22.5\ \text{kN}$$

Al momento de utilizar la ecuación 7 perteneciente al cortante $V_{(x)}$, se debe tener en cuenta que los puntos de aplicación de las cargas puntuales, *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, de la viga se consideran críticos, por la forma de actuar de dichas fuerzas; por tal razón, en cada punto se presentan dos valores, uno, antes de y, otro, después de aplicar la carga respectiva, dados así:

Punto *A*, $x = 0$: $V_{(0)} = 0$, antes y $V_{(0)} = 52.5$ kN, después

Punto *B*, $x = 1$ m: $V_{(1)} = 52.5$ kN, antes y $V_{(1)} = 22.5$ kN, después

Punto *C*, $x = 2$ m: $V_{(2)} = 22.5$ kN, antes y $V_{(2)} = -27.5$ kN, después

Punto *D*, $x = 3$ m: $V_{(3)} = -27.5$ kN, antes y $V_{(1)} = -47.5$ kN, después

Punto *E*, $x = 4$ m: $V_{(4)} = -47.5$ kN, antes y $V_{(4)} = 0$, después

8.7.2 Ejemplo 8.3

Para la viga *ABC* con la carga distribuida mostrada en la figura 8.13(a), determinar los diagramas de cortantes y de momentos y las respectivas ecuaciones.

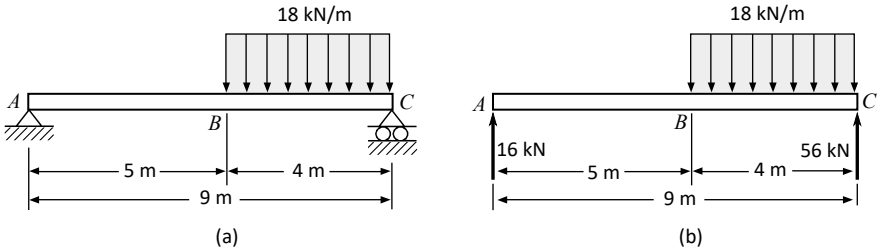


Figura 8.13

Solución

Se elabora un diagrama de cuerpo libre de la viga *ABC* y se determinan los valores de las reacciones en los puntos *A* y *C*, dados por $A = 16$ kN y $C = 56$ kN, como se observa en la figura 8.13(b). Se realizan los siguientes cortes a una distancia *x*, tomados desde el punto *A*.

Corte 1. Intervalo ($0 < x < 5$ m), entre los puntos *A* y *B*, de acuerdo con la figura 8.14(a).

$$\sum F_v + \uparrow = 0:\ 16\ \text{kN} - V = 0 \qquad V = 16\ \text{kN}$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0:\ M - (16\ \text{kN})(x) = 0 \qquad M = 16\ \text{kN}(x)$$

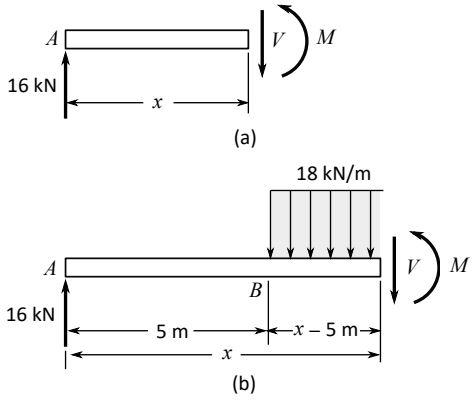


Figura 8.14

Corte 2. Intervalo ($5\ \text{m} < x < 9\ \text{m}$), entre los puntos *B* y *C*, como se muestra en la figura 8.14(b).

$$\sum F_v + \uparrow = 0:\ 16\ \text{kN} - (18\ \text{kN/m})(x - 5\ \text{m}) - V = 0$$

$$V = 16\ \text{kN} - (18\ \text{kN/m})(x - 5\ \text{m})$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0:\ M - (16\ \text{kN})(x) + (18\ \text{kN/m})(x - 5\ \text{m})\frac{(x - 5\ \text{m})}{2} = 0$$

$$M = (16\ \text{kN})(x) - \frac{18\ \text{kN/m}}{2}(x - 5\ \text{m})^2$$

Las ecuaciones de singularidad correspondientes son:

$$V = 16\ \text{kN}\langle x\rangle^0 - (18\ \text{kN/m})\langle x - 5\ \text{m}\rangle^1 \qquad (1)$$

$$M = 16\ \text{kN}\langle x\rangle^1 - \frac{(18\ \text{kN/m})}{2}\langle x - 5\ \text{m}\rangle^2 \qquad (2)$$

En la figura 8.15 se muestran los respectivos diagramas.

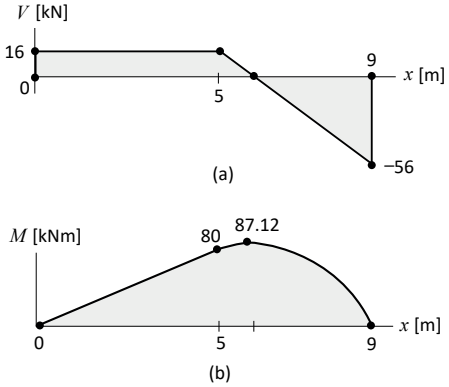


Figura 8.15

8.7.3 Ejemplo 8.4

Para la viga *ABCD* con la carga distribuida mostrada en la figura 8.16(a), determinar los diagramas de cortantes y de momentos y las respectivas ecuaciones.

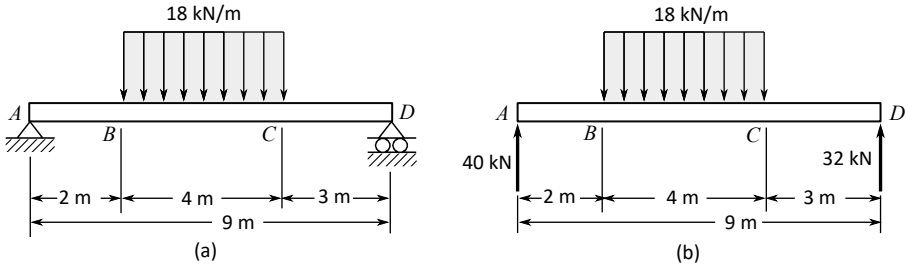


Figura 8.16

Solución

Se elabora un diagrama de cuerpo libre de la viga *ABCD* y se hallan los valores de las reacciones en los puntos *A* y *D*, dados por $A = 40$ kN y $D = 32$ kN, como se observa en la figura 8.16(b). Se realizan los siguientes cortes a una distancia x, tomados desde el punto *A*.

Corte 1. Intervalo ($0 < x < 2$ m), entre los puntos *A* y *B*, como se indica en la figura 8.17(a).

$$\sum F_v + \uparrow = 0:\ 40\ \text{kN} - V = 0 \qquad V = 40\ \text{kN}$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0:\ M - (40\ \text{kN})(x) = 0 \qquad M = 40\ \text{kN}(x)$$

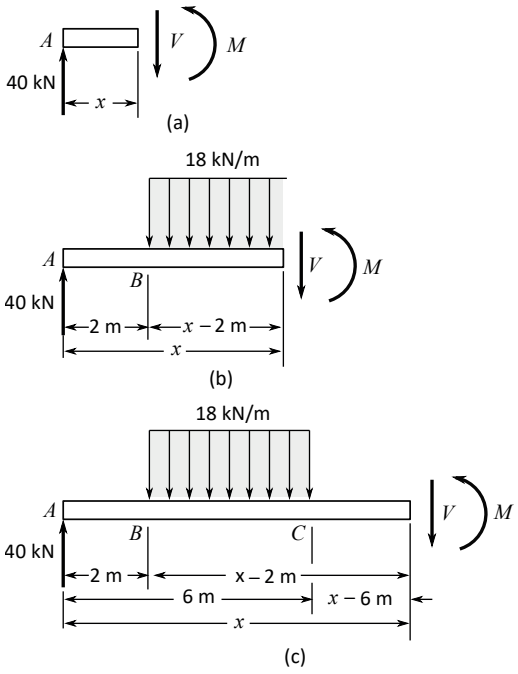


Figura 8.17

Corte 2. Intervalo (2 m < x < 6 m), entre los puntos B y C, de acuerdo con la figura 8.17(b).

$$\sum F_v + \uparrow = 0:\ 40\ \text{kN} - (18\ \text{kN/m})(x - 2\ \text{m}) - V = 0$$

$$V = 40\ \text{kN} - (18\ \text{kN/m})(x - 2\ \text{m})$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0:\ M - (40\ \text{kN})(x) + (18\ \text{kN/m})(x - 2\ \text{m})\frac{(x - 2\ \text{m})}{2} = 0$$

$$M = (40\ \text{kN})(x) - \frac{(18\ \text{kN/m})}{2}(x - 2\ \text{m})^2$$

Corte 3. Intervalo (6 m < x < 9 m), entre los puntos C y D, como se aprecia en la figura 8.17(c).

$$\sum F_v + \uparrow = 0:\ 40\ \text{kN} - (18\ \text{kN/m})[(x - 2\ \text{m}) - (x - 6\ \text{m})] - V = 0$$

$$V = 40\ \text{kN} - (18\ \text{kN/m})(x - 2\ \text{m}) + (18\ \text{kN/m})(x - 6\ \text{m})$$

$$\sum M + \circlearrowleft = 0:\ M - 40\ \text{kN}(x) + (18\ \text{kN/m})[(x - 2\ \text{m}) - (x - 6\ \text{m})]\left[\frac{(x - 2\ \text{m}) + (x - 6\ \text{m})}{2}\right] = 0$$

Al despejar M:

$$M = 40\ \text{kN}(x) - (18\ \text{kN/m})[(x - 2\ \text{m}) - (x - 6\ \text{m})]\left[\frac{(x - 2\ \text{m}) + (x - 6\ \text{m})}{2}\right]$$

Al factorizar:

$$M = 40\ \text{kN}(x) - \frac{18\ \text{kN/m}}{2}[(x - 2\ \text{m}) - (x - 6\ \text{m})][(x - 2\ \text{m}) + (x - 6\ \text{m})]$$

Al resolver por diferencia de cuadrados:

$$M = 40\ \text{kN}(x) - \frac{18\ \text{kN/m}}{2}[(x - 2\ \text{m})^2 - (x - 6\ \text{m})^2]$$

$$M = 40\ \text{kN}(x) - \frac{18\ \text{kN/m}}{2}(x - 2\ \text{m})^2 + \frac{18\ \text{kN/m}}{2}(x - 6\ \text{m})^2$$

Las respectivas ecuaciones están dadas por:

$$V = 40\ \text{kN}\langle x\rangle^0 - (18\ \text{kN/m})\langle x - 2\ \text{m}\rangle^1 + (18\ \text{kN/m})\langle x - 6\ \text{m}\rangle^1 \quad (1)$$

$$M = 40\ \text{kN}\langle x\rangle^1 - \frac{18\ \text{kN/m}}{2}\langle x - 2\ \text{m}\rangle^2 + \frac{18\ \text{kN/m}}{2}\langle x - 6\ \text{m}\rangle^2 \quad (2)$$

En la figura 8.18 se aprecian los correspondientes diagramas.

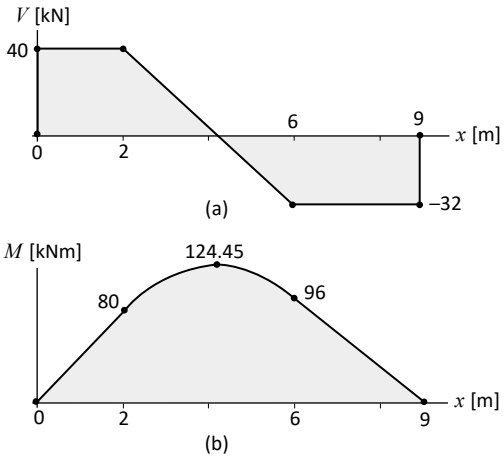
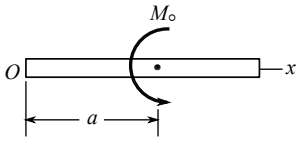
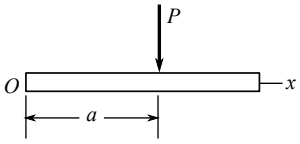
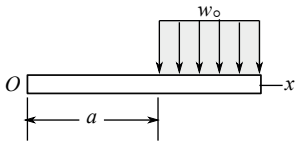


Figura 8.18

8.8 Aplicación directa de las funciones de singularidad

Los diagramas de cortantes y de momentos se pueden elaborar con base en las funciones obtenidas mediante cortes realizados a la viga, como se ha visto, aunque dichas ecuaciones se pueden desarrollar directamente, a partir de casos como los ilustrados en la tabla 8.1. Los ejemplos mostrados a continuación indican la forma de su empleo.

Tabla 8.1

CARGA	CORTANTE	MOMENTO FLECTOR
	–	$M(x) = -M_o\langle x - a\rangle^0$
	$V(x) = -P\langle x - a\rangle^0$	$M(x) = -P\langle x - a\rangle^1$
 $w(x) = -w_o\langle x - a\rangle^0$	$V(x) = -w_o\langle x - a\rangle^1$	$M(x) = -\frac{w_o}{2}\langle x - a\rangle^2$

8.8.1 Ejemplo 8.5

Obtener directamente las funciones de singularidad correspondientes a la fuerza cortante V y al momento flector M para la viga cargada como se indica en la figura 8.19(a) —igual a la figura 8.9(a)—.

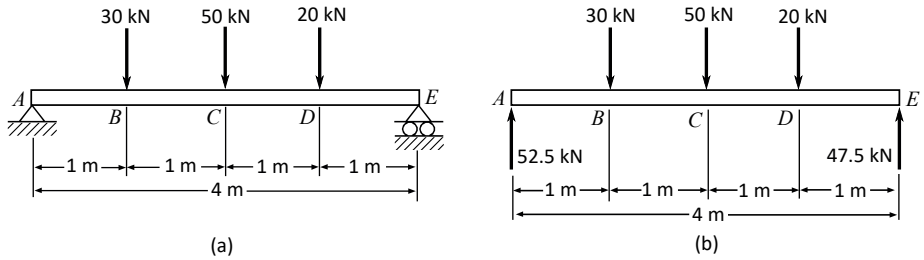


Figura 8.19

Solución

Se hallan las reacciones en los puntos A y E y se elabora el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.19(b) —igual a la figura 8.9(b)—.

De acuerdo con la tabla 8.1, a cada fuerza puntual $-P$ le corresponde $V(x) = -P\langle x - a\rangle^0$, y dado que es necesario expresar las ecuaciones de solo cuatro fuerzas, como se muestra en la figura 8.19(b), puesto que la reacción E no se toma por estar en la posición del valor máximo de x, o sea 4 m, las funciones de singularidad, teniendo en cuenta la magnitud, el signo y la posición de cada fuerza, al omitir las unidades para simplificar, quedan así:

$$V(x) = 52.5\langle x\rangle^0 - 30\langle x - 1\rangle^0 - 50\langle x - 2\rangle^0 - 20\langle x - 3\rangle^0 \quad (1)$$

$$M(x) = 52.5\langle x\rangle^1 - 30\langle x - 1\rangle^1 - 50\langle x - 2\rangle^1 - 20\langle x - 3\rangle^1 \quad (2)$$

8.8.2 Ejemplo 8.6

Determinar las funciones de singularidad correspondientes a la fuerza cortante V y al momento flector M, con base en la información dada en la tabla 8.1, para la viga cargada como se indica en la figura 8.20(a) —igual a la figura 8.13(a)— y comparar con las funciones obtenidas en el ejemplo 8.3, mediante el método de cortes.

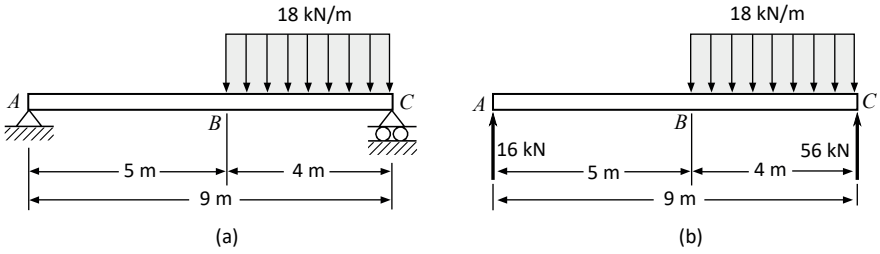


Figura 8.20

Solución

Se hallan las reacciones en los puntos A y C y se elabora el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.20(b), en el cual se observa que dado que la reacción en C, por estar en la posición del valor máximo de x, no se tiene en cuenta, solo es necesario expresar en forma de ecuaciones la reacción en A = 16 kN, desde el punto de inicio, y la carga distribuida de 18 kN/m, a partir del punto a = 5 m, conforme a la tabla 8.1, por tanto, las funciones están dadas así:

$$w(x) = -(18\ \text{kN/m})\langle x - 5\ \text{m}\rangle^0$$

$$V(x) = 16\ \text{kN}\langle x\rangle^0 - (18\ \text{kN/m})\langle x - 5\ \text{m}\rangle^1 \quad (1)$$

$$M(x) = (16\ \text{kN})\langle x\rangle^1 - \frac{(18\ \text{kN/m})}{2}\langle x - 5\ \text{m}\rangle^2 \quad (2)$$

Se observa en el ejemplo 8.3, como en este, las igualdades entre las ecuaciones 1 para el cortante V y las ecuaciones 2 relativas al momento M, desarrolladas en el primer caso, mediante el método de cortes, y en el actual, por aplicación directa de las funciones de singularidad.

8.8.3 Ejemplo 8.7

Una viga en voladizo ABC empotrada en el punto A soporta una carga distribuida como se indica en la figura 8.21(a). Hallar las ecuaciones de singularidad para la fuerza cortante V y el momento M y dibujar los respectivos diagramas.

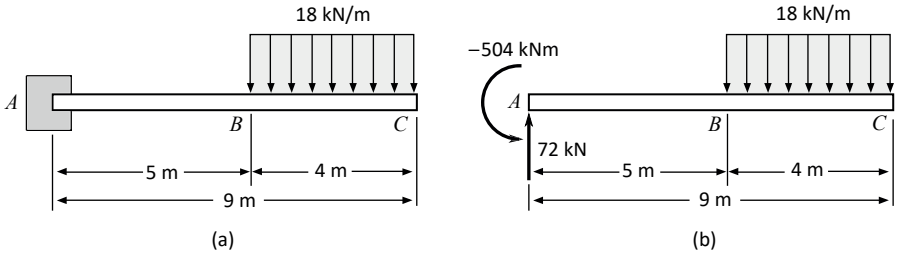


Figura 8.21

Solución

Se determinan las reacciones y se elabora el diagrama de cuerpo libre como se indica en la figura 8.21(b).

Se observa, en la figura 8.21(b), que es necesario expresar la reacción en A = 72 kN y un momento puntual M_A = −504 kNm, ambos desde el punto de inicio, y además una

carga distribuida de 18 kN/m a partir del punto a = 5 m, por lo que, de acuerdo con la tabla 8.1, las funciones de singularidad correspondientes están dadas así:

$$w(x) = -(18\ \text{kN/m})\langle x - 5\ \text{m}\rangle^0$$

$$V(x) = 72\ \text{kN}\langle x\rangle^0 - (18\ \text{kN/m})\langle x - 5\ \text{m}\rangle^1$$

$$M(x) = -504\ \text{kNm}\langle x\rangle^0 + (72\ \text{kN})\langle x\rangle^1 - \frac{(18\ \text{kN/m})}{2}\langle x - 5\ \text{m}\rangle^2$$

Los diagramas respectivos se muestran en la figura 8.22.

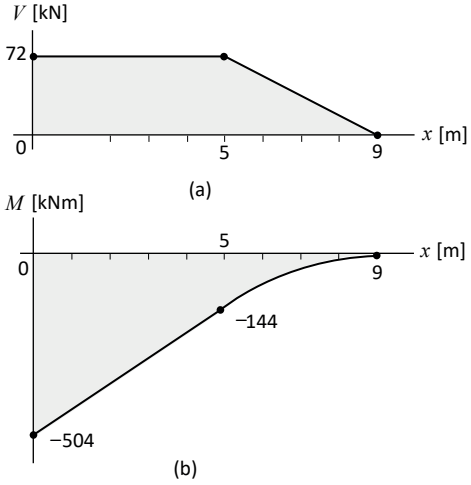


Figura 8.22

8.9 Tipos de cargas distribuidas y funciones de singularidad

Las cargas distribuidas aplicadas a las vigas se componen básicamente de cargas uniformes, triangulares crecientes, triangulares decrecientes, o de una combinación de ellas. Como las posibilidades de disposición son muchas, a continuación se analizarán algunos casos básicos, que ayudarán a obtener las configuraciones deseadas y expresarlas en forma de funciones de singularidad.

8.9.1 Carga distribuida uniforme

Caso 1.1. Carga uniforme a lo largo de toda la viga desde x = 0 hasta el extremo derecho, como se ilustra en la figura 8.23, dada por la ecuación 8.3.

$$w(x) = w_o\langle x\rangle^0 \tag{8.3}$$

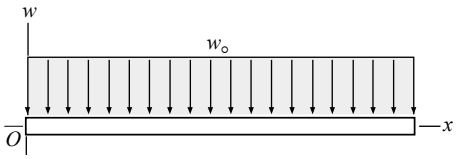


Figura 8.23

Caso 1.2. Carga uniforme desde $x = a$ hasta el extremo derecho de la viga, como se muestra en la figura 8.24, equivalente al caso 1.1 tomado a partir de $x = a$, representada mediante la función 8.4.

$$w(x) = w_o\langle x - a\rangle^0 \tag{8.4}$$

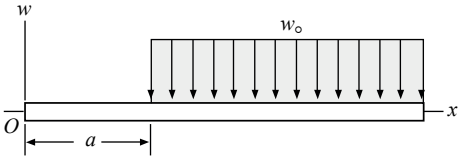


Figura 8.24

Caso 1.3. Carga uniforme desde $x = 0$ hasta $x = a$, como se indica en la figura 8.25, equivalente al caso 1.1 menos el caso 1.2, expresada mediante la relación 8.5.

$$w(x) = w_o\langle x\rangle^0 - w_o\langle x - a\rangle^0 \tag{8.5}$$

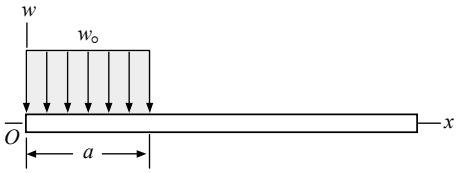


Figura 8.25

Caso 1.4. Carga uniforme desde $x = a$ hasta $x = c$, de acuerdo con la figura 8.26, equivalente al caso 1.2 tomado a partir de $x = a$, menos el mismo caso 1.2, aunque desde $x = c$, dada mediante la relación 8.6.

$$w(x) = w_o\langle x - a\rangle^0 - w_o\langle x - c\rangle^0 \tag{8.6}$$

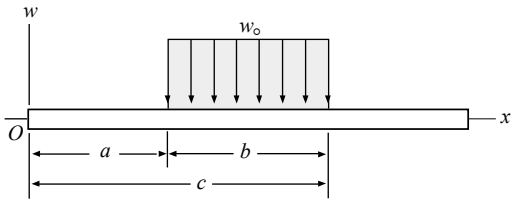


Figura 8.26

8.9.2 Carga distribuida creciente con uniforme

Caso 2.1. Carga creciente desde $x = 0$ hasta el extremo derecho de la viga, como se aprecia en la figura 8.27, con pendiente $m = w_o/b$, expresada mediante la ecuación 8.7.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x\rangle^1 \tag{8.7}$$

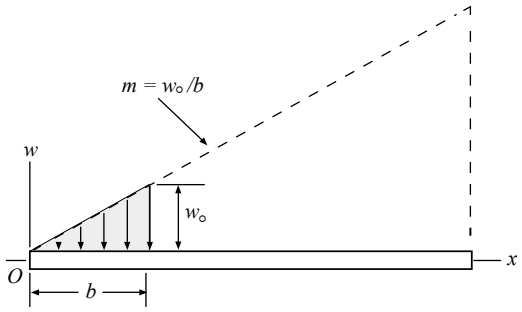


Figura 8.27

Caso 2.2. Carga creciente desde $x = a$ hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = w_o/b$, como se muestra en la figura 8.28, equivalente al caso 2.1 tomado a partir de $x = a$, representada por la relación 8.8.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x - a\rangle^1 \tag{8.8}$$

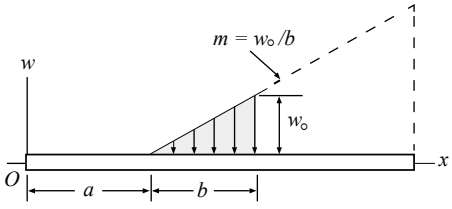


Figura 8.28

Caso 2.3. Carga combinada creciente desde x = 0 hasta x = b más uniforme hasta el extremo derecho de la viga, como se muestra en la figura 8.29(a), como resultado de la diferencia de cargas crecientes de igual pendiente $m = w_o/b$, una desde x = 0, como se indica en la figura 8.29(b), y la otra desde x = b, como se ilustra la figura 8.29(c), equivalente al caso 2.1 menos el caso 2.2, descrita mediante la relación 8.9.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-b\rangle^1 \tag{8.9}$$

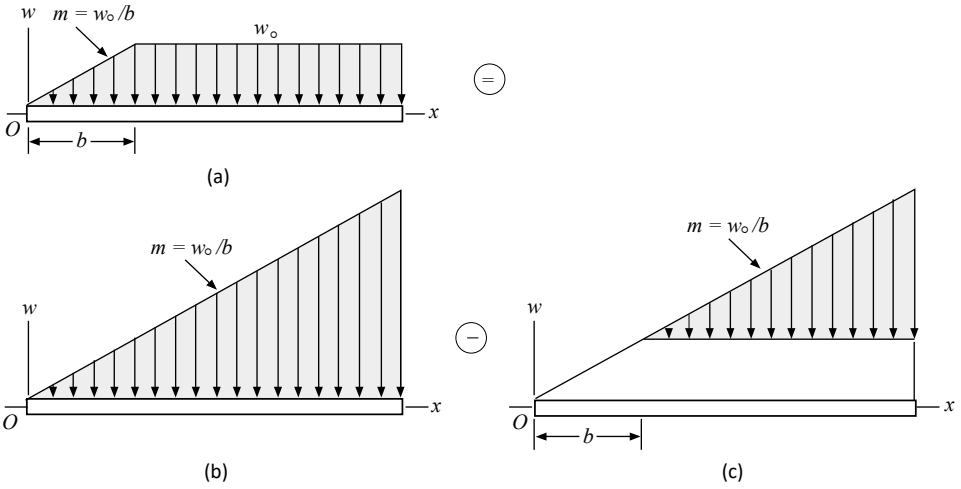


Figura 8.29

Caso 2.4. Carga creciente desde x = 0 hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$, como se muestra en la figura 8.30, equivalente al caso 2.3 menos el caso 1.2, desde $x = b$, dada por la ecuación 8.10.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-b\rangle^1 - w_o\langle x-b\rangle^0 \tag{8.10}$$

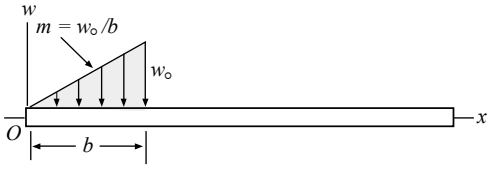


Figura 8.30

Caso 2.5. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = w_o/b$, como se aprecia en la figura 8.31, equivalente al caso 2.4 tomado a partir de $x = a$, representada por la ecuación 8.11.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x - a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x - c\rangle^1 - w_o\langle x - c\rangle^0 \tag{8.11}$$

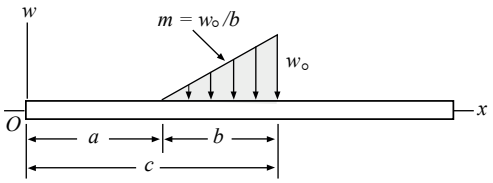


Figura 8.31

Caso 2.6. Carga creciente desde $x = a$ hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = w_o/b$, como se indica en la figura 8.32, equivalente al caso 2.5, teniendo en cuenta que $x = c = a + b$, descrita mediante la relación 8.12.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x - a\rangle^1 \tag{8.12}$$

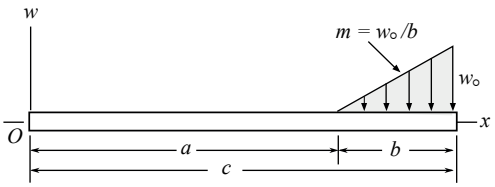


Figura 8.32

Caso 2.7. Carga combinada creciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = w_o/b$ más uniforme hasta el extremo derecho de la viga, como se indica en la figura 8.33, equivalente al caso 2.3 tomado a partir de $x = a$, dada por la ecuación 8.13.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x - a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x - c\rangle^1 \tag{8.13}$$

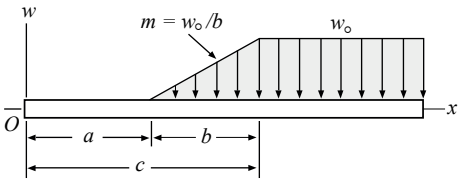


Figura 8.33

Caso 2.8. Carga combinada creciente más uniforme desde $x = a$ hasta $x = e$ con pendiente $m = w_o/b$, como se aprecia en la figura 8.34, equivalente al caso 2.7 menos el caso 1.2 tomado a partir de $x = e$, descrita mediante la relación 8.14.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-c\rangle^1 - w_o\langle x-e\rangle^0 \tag{8.14}$$

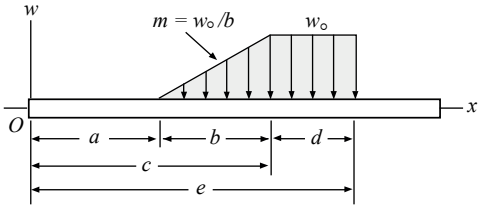


Figura 8.34

8.9.3 Carga distribuida decreciente con uniforme

Caso 3.1. Carga decreciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = -w_o/b$, como se muestra en la figura 8.35(a), como resultado de la diferencia entre una carga uniforme w_o, como se indica en la figura 8.35(b), y una carga creciente con pendiente $m = w_o/b$, conforme a la figura 8.35(c), equivalente al caso 1.4 menos el caso 2.5, dada por la ecuación 8.15.

$$w(x) = w_o\langle x-a\rangle^0 - \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 + \frac{w_o}{b}\langle x-c\rangle^1 \tag{8.15}$$

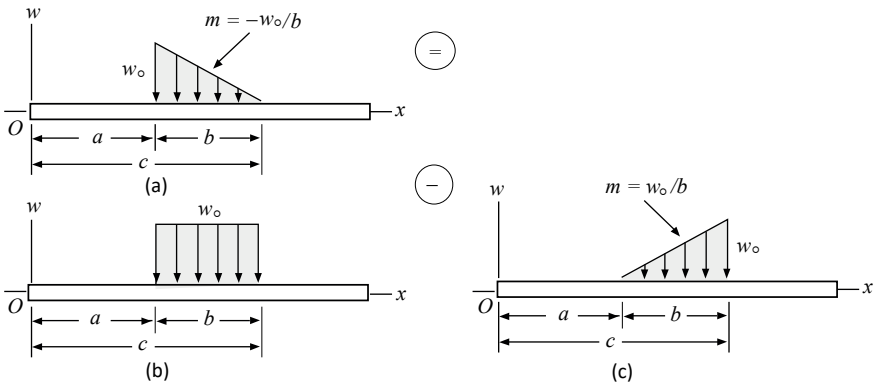


Figura 8.35

Caso 3.2. Carga decreciente desde $x = o$ hasta $x = b$ con pendiente $m = -w_o/b$, como se muestra en la figura 8.36, equivalente al caso 3.1 tomando $a = o$ y $c = b$, representada mediante la ecuación 8.16.

$$w(x) = w_o\langle x\rangle^0 - \frac{w_o}{b}\langle x\rangle^1 + \frac{w_o}{b}\langle x-b\rangle^1 \tag{8.16}$$

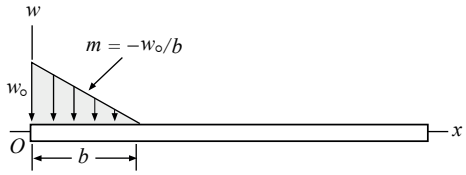


Figura 8.36

Caso 3.3. Carga decreciente desde $x = a$ hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = -w_o/b$, como se ilustra en la figura 8.37, equivalente al caso 3.1 tomando $x = c$, descrita mediante la relación 8.17.

$$w(x) = w_o\langle x-a\rangle^0 - \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 \tag{8.17}$$

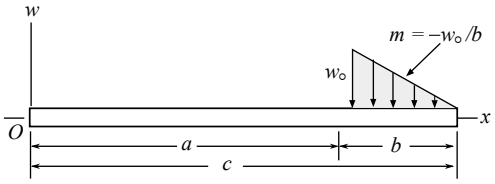


Figura 8.37

Caso 3.4. Carga uniforme desde $x = o$ hasta $x = a$ y decreciente hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = -w_o/b$, como se aprecia en la figura 8.38, equivalente al caso 1.3 más el caso 3.3, dada mediante la ecuación 8.18.

$$w(x) = w_o\langle x\rangle^0 - \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 \tag{8.18}$$

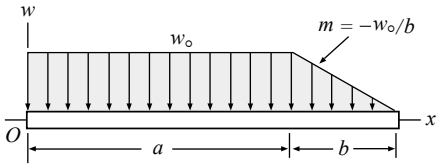


Figura 8.38

Caso 3.5. Carga uniforme desde $x = a$ hasta $x = c$ y decreciente hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = -w_o/d$, como se ilustra en la figura 8.39, equivalente al caso 1.4 más el caso 3.3, representada por la relación 8.19.

$$w(x) = w_o\langle x-a\rangle^0 - \frac{w_o}{d}\langle x-c\rangle^1 \tag{8.19}$$

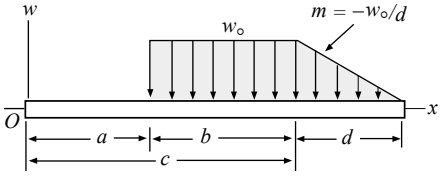


Figura 8.39

Caso 3.6. Carga uniforme desde $x = a$ hasta $x = c$ y decreciente hasta $x = e$ con pendiente $m = -w_o/d$, como se aprecia en la figura 8.40, equivalente al caso 1.4 más el caso 3.1, descrita por la ecuación 8.20.

$$w(x) = w_o\langle x-a\rangle^0 - \frac{w_o}{d}\langle x-c\rangle^1 + \frac{w_o}{d}\langle x-e\rangle^1 \tag{8.20}$$

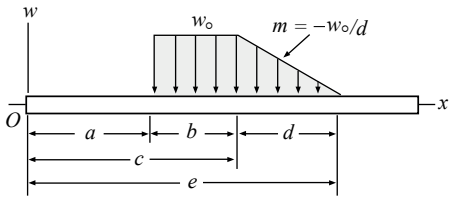


Figura 8.40

8.9.4 Cargas distribuidas crecientes y decrecientes

Caso 4.1. Carga creciente desde $x = o$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta el extremo derecho de la viga, como se observa en la figura 8.41, equivalente al caso 2.4 más el caso 3.3, dada por la ecuación 8.21.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-b\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-b\rangle^1 \tag{8.21}$$

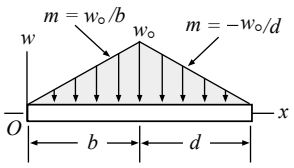


Figura 8.41

Caso 4.2. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = w_o/b$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta el extremo derecho de la viga, como se aprecia en la figura 8.42, equivalente al caso 4.1 tomado a partir de $x = a$, representada mediante la relación 8.22.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-c\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-c\rangle^1 \tag{8.22}$$

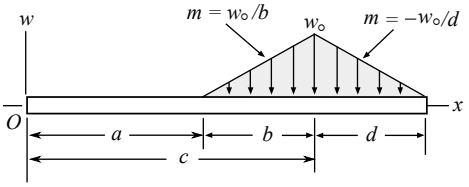


Figura 8.42

Caso 4.3. Carga creciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta $x = c$, como se observa en la figura 8.43, equivalente al caso 2.4 más el caso 3.1, expresada mediante la función 8.23.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-b\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-b\rangle^1 + \frac{w_o}{d}\langle x-c\rangle^1 \tag{8.23}$$

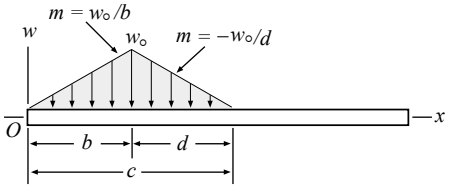


Figura 8.43

Caso 4.4. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = w_o/b$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta $x = e$, como se muestra en la figura 8.44, equivalente al caso 4.3 tomado a partir de $x = a$, dada por la ecuación 8.24.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-c\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-c\rangle^1 + \frac{w_o}{d}\langle x-e\rangle^1 \tag{8.24}$$

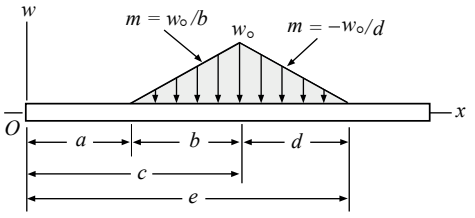


Figura 8.44

Caso 4.5. Carga creciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$ uniforme hasta $x = e$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta el extremo derecho de la viga, como se observa en la figura 8.45, equivalente al caso 2.4 más el caso 3.5, descrita mediante la ecuación 8.25.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-b\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-e\rangle^1 \tag{8.25}$$

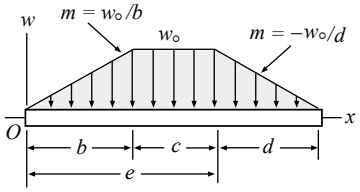


Figura 8.45

Caso 4.6. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = e$ con pendiente $m = w_o/b$ uniforme hasta $x = f$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta el extremo derecho de la viga, como se ilustra en la figura 8.46, equivalente al caso 4.5 tomado a partir de $x = a$, representada mediante la función 8.26.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-e\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-f\rangle^1 \tag{8.26}$$

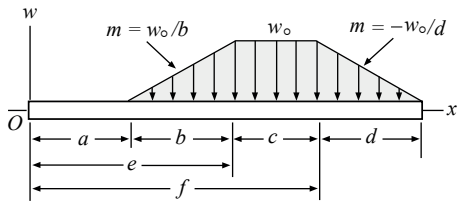


Figura 8.46

Caso 4.7. Carga creciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$ uniforme hasta $x = b$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta $x = f$, como se observa en la figura 8.47, equivalente al caso 2.4 más el caso 3.6, dada por la ecuación 8.27.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-b\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-e\rangle^1 + \frac{w_o}{d}\langle x-f\rangle^1 \tag{8.27}$$

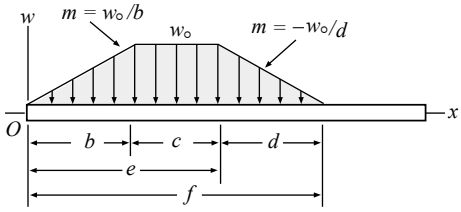


Figura 8.47

Caso 4.8. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = e$ con pendiente $m = w_o/b$ uniforme hasta $x = f$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta $x = g$, como se aprecia en la figura 8.48, equivalente al caso 4.7 tomado a partir de $x = a$, representada mediante la ecuación 8.28.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-e\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-f\rangle^1 + \frac{w_o}{d}\langle x-g\rangle^1 \qquad (8.28)$$

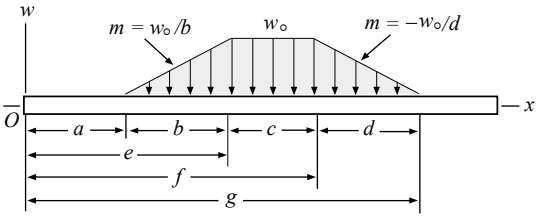


Figura 8.48

8.10 Soluciones de vigas con cargas distribuidas por funciones de singularidad

El procedimiento general para expresar las fuerzas cortantes y los momentos flectores, en vigas que contienen cargas distribuidas —uniformes, crecientes o decrecientes—, aplicando las funciones de singularidad, consta de los siguientes pasos:

1. Identificar el tipo de carga distribuida, de acuerdo con los casos vistos en las secciones 8.9.1 hasta 8.9.4, y expresarla en forma de funciones de singularidad dada por *w(x)*.

2. Obtener *V(x)* al integrar *w(x)*, con el signo invertido, teniendo en cuenta la relación entre carga y fuerza cortante, dada mediante la expresión 8.1, y adicionar las fuerzas puntuales requeridas, con sus posiciones y signos, conforme a la tabla 8.1.
3. Integrar a *V(x)* , para conseguir a *M(x)*, con base en la relación entre fuerza cortante y momento flector, dada por la ecuación 8.2, y agregar los momentos puntuales necesarios, con sus posiciones y signos, de acuerdo con la tabla 8.1.

Los ejemplos resueltos a continuación ilustrarán acerca del procedimiento indicado.

8.10.1 Ejemplo 8.8

Determinar las funciones de singularidad para la fuerza cortante *V* y el momento flector *M* de la viga cargada como se indica en la figura 8.49(a) —igual a la figura 8.16(a)— y comparar con las funciones definidas en el ejemplo 8.4, mediante el método de cortes.

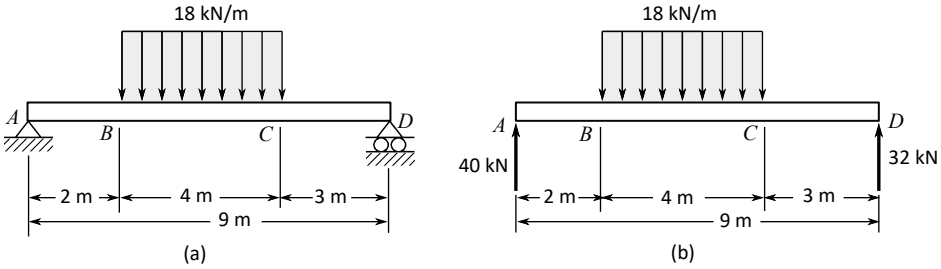


Figura 8.49

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga *ABCD* y se hallan los valores de las reacciones en los puntos *A* y *D*, dados por *A* = 40 kN y *D* = 32 kN, como se observa en la figura 8.49(b) —igual a la figura 8.16(b)—.

Al aplicar el procedimiento descrito en el numeral 8.10, se observa que la viga contiene una carga distribuida uniforme desde el punto *B* hasta el punto *C*, como se aprecia en la figura 8.49(a), por lo tanto, se identifica como el caso 1.4, expresada mediante la ecuación 8.6, así:

$$w(x) = w_0\langle x-a\rangle^0 - w_0\langle x-c\rangle^0$$

Al sustituir valores y omitir las unidades para simplificar, queda así:

$$w(x) = 18\langle x-2\rangle^0 - 18\langle x-6\rangle^0$$

Al integrar $w(x)$ con el signo invertido y adicionar las cargas puntuales, se tiene:

$$V(x) = 40\langle x\rangle^0 - 18\langle x-2\rangle^1 + 18\langle x-6\rangle^1 \quad (1)$$

Al integrar $V(x)$, y debido a que no existen momentos puntuales, se da:

$$M(x) = 40\langle x\rangle^1 - 9\langle x-2\rangle^2 + 9\langle x-6\rangle^2 \quad (2)$$

Son de notar, en relación con el ejemplo 8.4 y el actual, las igualdades entre las ecuaciones 1, para el cortante V y las ecuaciones 2, correspondientes al momento M, desarrolladas en el primer caso, mediante el método de cortes y en el presente caso, por aplicación directa de las funciones de singularidad.

8.10.2 Ejemplo 8.9

Para la viga *ABCDE* con la carga distribuida como se indica en la figura 8.50, expresar las respectivas funciones de singularidad y utilizarlas para calcular los valores de V y de M, para los puntos A, B, C, D y E, así como para el punto donde el momento alcanza el valor máximo, y dibujar, además, los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores correspondientes.

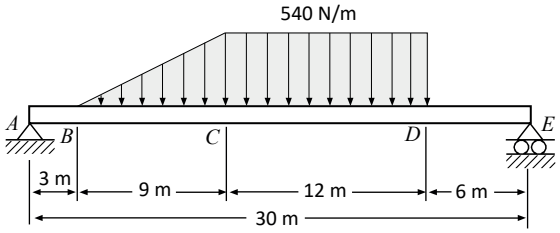


Figura 8.50

Solución

Se realiza el diagrama de cuerpo libre de la viga *ABCDE* y se hallan las magnitudes de las reacciones en A = 4 293 N y E = 4 617 N, como se ilustra en la figura 8.51.

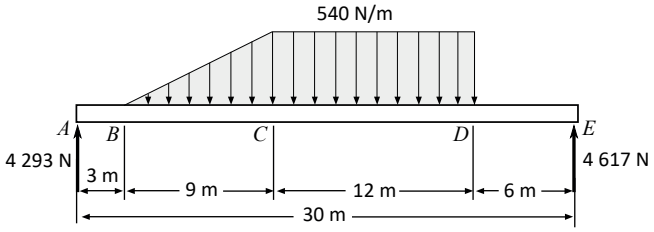


Figura 8.51

Como se observa en la figura 8.51, la viga contiene una carga distribuida compuesta creciente desde *B* hasta *C* y uniforme hasta el punto *D*, por lo tanto, se identifica como el caso 2.8 correspondiente a la ecuación 8.14, expresada así:

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-c\rangle^1 - w_o\langle x-e\rangle^0$$

Al reemplazar los datos correspondientes y omitir las unidades, se tiene:

$$w(x) = \frac{540}{9}\langle x-3\rangle^1 - \frac{540}{9}\langle x-12\rangle^1 - 540\langle x-24\rangle^0$$

Después de simplificar:

$$w(x) = 60\langle x-3\rangle^1 - 60\langle x-12\rangle^1 - 540\langle x-24\rangle^0 \quad (1)$$

Al integrar, invertir los signos y adicionar las cargas puntuales:

$$V(x) = 4\,293\langle x\rangle^0 - 30\langle x-3\rangle^2 + 30\langle x-12\rangle^2 + 540\langle x-24\rangle^1 \quad (2)$$

Al integrar nuevamente y dado que no existen momentos puntuales, se obtiene:

$$M(x) = 4\,293\langle x\rangle^1 - 10\langle x-3\rangle^3 + 10\langle x-12\rangle^3 + 270\langle x-24\rangle^2 \quad (3)$$

En una viga, los puntos donde existen reacciones, o fuerzas puntuales, o donde inician o finalizan cargas distribuidas, como los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, de la viga mostrada en la figura 8.50, son importantes para analizar porque pueden constituir los denominados *puntos críticos,* donde se presentan los máximos valores de fuerzas cortantes o de momentos flectores.

Para determinarlos es necesario realizar un seguimiento de los valores en cada intervalo, tanto de las fuerzas cortantes como de los momentos, con la ayuda de las funciones *V(x)* y *M(x)* dadas, las cuales en el presente caso corresponden a las ecuaciones 2 y 3, respectivamente.

Se sustituyen valores de *x* en la relación 2, para analizar *V(x)*, teniendo en cuenta que se trata de ecuaciones de singularidad en donde las cantidades entre paréntesis no pueden tomar valores negativos, sino positivos o cero, así:

Punto *A*, $x = 0$: $V_{(0)} = A = 4\,293\ \text{N} \quad \boldsymbol{V_{(0)} = 4\,293\ \text{N}}$

Punto *B*, $x = 3$ m: $V_{(3)} = 4\,293x^0[\text{N}] = 4\,293\ \text{N} \quad \boldsymbol{V_{(3)} = 4\,293\text{N}}$

Punto *C*, $x = 12$ m: $V_{(12)} = 4\,293x^0 - 30(x-3)^2\ [\text{N}] = 4\,293 - 30(9)^2\ [\text{N}] = 1\,863\ \text{N}$

$$\boldsymbol{V_{(12)} = 1\,863\ \text{N}}$$

Punto *D*, $x = 24$ m: $V_{(24)} = 4\,293x^0 - 30(x-3)^2 + 30(x-12)^2[\text{N}]$

$= 4\,293 - 30(21)^2 + 30(12)^2\ [\text{N}] = -4\,617\ \text{N} \quad \boldsymbol{V_{(24)} = -4\,617\ \text{N}}$

Punto *E*, $x = 30$ m: $V_{(30)} = 4\,293x^0 - 30(x-3)^2 + 30(x-12)^2 + 540(x-24)^1\ [\text{N}]$

$= 4\,293 - 30(27)^2 + 30(18)^2 + 540(6)^1\ [\text{N}] = -4\,617\ \text{N} \quad \boldsymbol{V_{(30)} = -4\,617\ \text{N}}$

Con la información anterior y la naturaleza de la ecuación, de acuerdo con cada intervalo, se obtiene la gráfica de *V* en función de *x*, o diagrama de fuerzas cortantes, presentado en la figura 8.52(a).

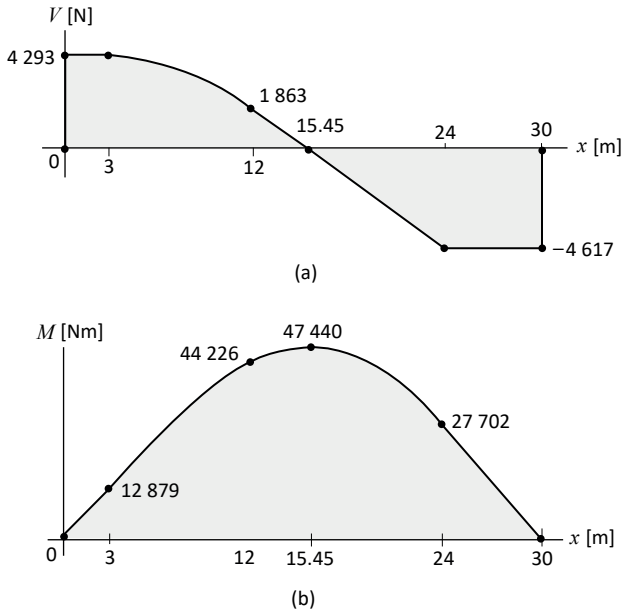


Figura 8.52

Se observa que entre los puntos *C* y *D* la función pasa de un valor positivo (+1 863 N) a un valor negativo (−4 617 N), lo cual implica que entre dichos puntos se presenta un valor de cero.

Conforme a los procedimientos matemáticos de máximos y mínimos de funciones, aplicados en el presente caso, al igualar a cero *V(x)*, la cual representa la derivada de *M(x)*, se obtiene el valor máximo o mínimo de *M(x)*, expresado mediante la ecuación 8.2, así:

$$V = \frac{dM}{dx} = 0 \qquad M = \text{máximo o mínimo}$$

Por lo tanto, se iguala a cero la función de *V(x)* en el intervalo (12 m < *x* < 24 m), para hallar el valor correspondiente de *x*, y al omitir las unidades, se tiene:

$$V(x) = 4\,293x^0 - 30(x-3)^2 + 30(x-12)^2 = 0$$

$$4\,293 = 30(x-3)^2 - 30(x-12)^2$$

$$\frac{4\,293}{30} = (x-3)^2 - (x-12)^2 = [(x-3)+(x-12)][(x-3)-(x-12)]$$

$$143.1 = [(2x-15)][(9)] = 18x - 135 \qquad 18x = 278.1 \quad x = 15.45 \text{ m}$$

El máximo valor del momento se determina al sustituir valores en la ecuación (3), como sigue:

$$M(x) = 4\,293x^1 - 10(x-3)^3 + 10(x-12)^3 + 270(x-24)^2\ [\text{Nm}]$$

$$M_{(15.45)} = 4\,293(15.45) - 10(12.45)^3 + 10(3.45)^3\ [\text{Nm}] = 47\,440\ \text{Nm} \qquad \boldsymbol{M_{(15.45)} = 47\,440\ \text{Nm}}$$

Los valores de los momentos en los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* se hallan así:

$$\text{Punto } A,\ x = 0\text{: } \boldsymbol{M_{(0)} = 0}$$

$$\text{Punto } B,\ x = 3\ \text{m: } M_{(3)} = 4\,293x^1 = 4\,293(3)\ [\text{Nm}] = 12\,879\ \text{Nm} \qquad \boldsymbol{M_{(3)} = 12\,879\ \text{Nm}}$$

$$\text{Punto } C,\ x = 12\ \text{m: } M_{(12)} = 4\,293x^1 - 10(x-3)^3[\text{Nm}] = 4\,293(12) - 10(9)^3[\text{Nm}] = 44\,226\ \text{Nm}$$

$$\boldsymbol{M_{(12)} = 44\,226\ \text{Nm}}$$

$$\text{Punto } D,\ x = 24\ \text{m: } M_{(24)} = 4\,293x^1 - 10(x-3)^3 + 10(x-12)^3[\text{Nm}]$$

$$= 4\,293(24) - 10(21)^3 + 10(12)^3\ [\text{Nm}] = 27\,702\ \text{Nm} \qquad \boldsymbol{M_{(24)} = 27\,702\ \text{Nm}}$$

$$\text{Punto } E,\ x = 30\ \text{m: } M_{(30)} = 4\,293x^1 - 10(x-3)^3 + 10(x-12)^3 + 270(x-24)^2[\text{Nm}]$$

$$= 4\,293(30) - 10(27)^3 + 10(18)^3 + 270(6)^2\ [\text{Nm}] = 0 \qquad \boldsymbol{M_{(30)} = 0}$$

De acuerdo con los valores de los momentos hallados y la naturaleza de la función, en cada intervalo se obtiene la gráfica de *M* en función de *x*, o diagrama de momentos flectores, como se aprecia en la figura 8.52(b).

8.10.3 Ejemplo 8.10

Con base en la viga *ABCDEF* cargada como se muestra en la figura 8.53, expresar las funciones de singularidad correspondientes y aplicarlas para determinar los valores de *V* y de *M*, para los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, así como para el punto donde el momento alcanza el valor máximo, y dibujar, también, los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores.

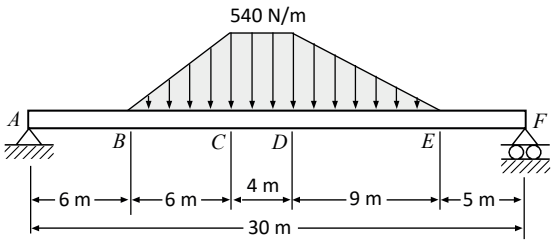


Figura 8.53

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga *ABCDEF* y se hallan los valores de las reacciones en $A = 3\,123$ N y $F = 3\,087$ N, como se ilustra en la figura 8.54.

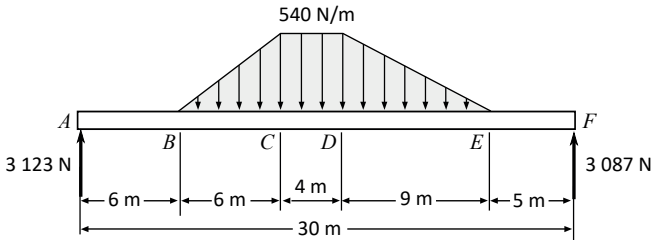


Figura 8.54

La viga *ABCDEF*, como se muestra en la figura 8.54, contiene una carga distribuida compuesta creciente desde *B* hasta *C* uniforme hasta el punto *D* y decreciente hasta el punto *E*, por lo tanto, se le aplica el caso 4.8, expresada mediante la ecuación 8.28, así:

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 - \frac{w_o}{b}\langle x-e\rangle^1 - \frac{w_o}{d}\langle x-f\rangle^1 + \frac{w_o}{d}\langle x-g\rangle^1$$

Al tomar los datos correspondientes y omitir las unidades, se tiene:

$$w(x) = \frac{540}{6}\langle x-6\rangle^1 - \frac{540}{6}\langle x-12\rangle^1 - \frac{540}{9}\langle x-16\rangle^1 + \frac{540}{9}\langle x-25\rangle^1$$

Al integrar *w(x)* con el signo invertido y agregar las cargas puntuales, resulta:

$$V(x) = 3\,123\langle x\rangle^0 - 45\langle x-6\rangle^2 + 45\langle x-12\rangle^2 + 30\langle x-16\rangle^2 - 30\langle x-25\rangle^2$$

Al integrar *V(x)* y dado que no existen momentos puntuales, se obtiene:

$$M(x) = 3\,123\langle x\rangle^1 - 15\langle x-6\rangle^3 + 15\langle x-12\rangle^3 + 10\langle x-16\rangle^3 - 10\langle x-25\rangle^3$$

Se analizan los puntos clave *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, en relación con *V(x)*, así:

Punto *A*, $x = 0$: $V_{(0)} = A = 3\,123$ N $\quad \boldsymbol{V_{(0)} = 3\,123\ \text{N}}$

Punto *B*, $x = 6$ m: $V_{(6)} = 3\,123x^0$ [N] $= 3\,123$ N $\quad \boldsymbol{V_{(6)} = 3\,123\ \text{N}}$

Punto *C*, $x = 12$ m: $V_{(12)} = 3\,123x^0 - 45(x-6)^2$ [N] $= 3\,123 - 45(6)^2$ [N] $= 1\,503$ N

$$\boldsymbol{V_{(12)} = 1\,503\ \text{N}}$$

Punto *D*, $x = 16$ m: $V_{(16)} = 3\,123x^0 - 45(x-6)^2 + 45(x-12)^2$[N]

$= 3\,123 - 45(10)^2 + 45(4)^2$ [N] $= -657$ N $\quad \boldsymbol{V_{(16)} = -657\ \text{N}}$

Punto *E*, $x = 25$ m: $V_{(25)} = 3\,123x^0 - 45(x-6)^2 + 45(x-12)^2 + 30(x-16)^2$ [N]

$= 3\,123 - 45(19)^2 + 45(13)^2 + 30(9)^2$[N] $= -3\,087$ N $\quad \boldsymbol{V_{(25)} = -3\,087\ \mathbf{N}}$

Punto *F*, $x = 30$ m: $V_{(30)} = 3\,123x^0 - 45(x-6)^2 + 45(x-12)^2 + 30(x-16)^2 - 30(x-25)^2$ [N]

$= 3\,123 - 45(24)^2 + 45(18)^2 + 30(14)^2 - 30(5)^2$ [N] $= -3\,087$ N $\quad \boldsymbol{V_{(30)} = -3\,087\ \mathbf{N}}$

Con base en los valores obtenidos, se realiza el diagrama de fuerzas cortantes mostrado en la figura 8.55(a).

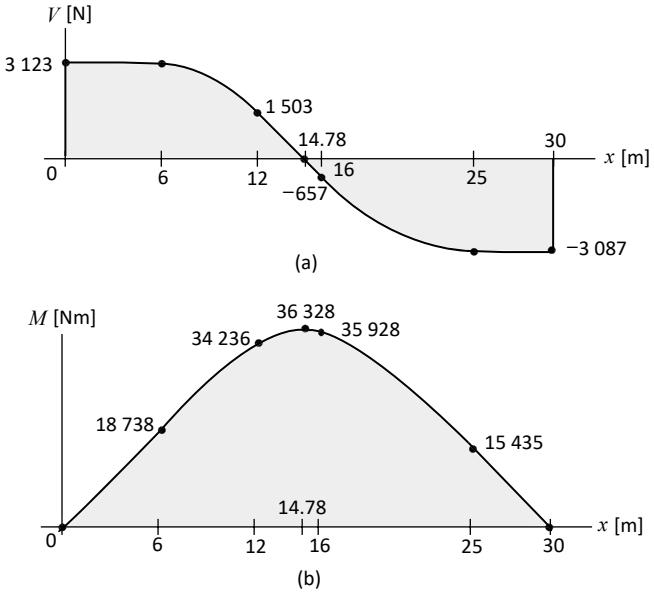


Figura 8.55

Se determina ahora el valor de *x* donde la función *V(x)* es igual a cero, para hallar el punto donde el momento es máximo, para lo cual se observa, de acuerdo con la figura 8.55(a), que corresponde al intervalo entre *C* y *D*, o sea a (12 m < *x* < 16 m), y al reemplazar valores, se tiene:

$$V(x) = 3\,123x^0 - 45(x-6)^2 + 45(x-12)^2 = 0$$

$$3\,123 = 45(x-6)^2 - 45(x-12)^2$$

$$\frac{3\,123}{45} = (x-6)^2 - (x-12)^2 = [(x-6) + (x-12)][(x-6) - (x-12)]$$

$$69.4 = [(2x-18)][(6)] = 12x - 108 \qquad 12x = 177.4 \quad x = 14.78 \text{ m}$$

Se sustituye este valor, en la ecuación *M(x)*, para hallar el momento máximo, así:

$$M(x) = 3\,123x^1 - 15(x-6)^3 + 15(x-12)^3\ [\text{Nm}]$$

$$M_{(14.78)} = 3\,123(14.78) - 15(8.78)^3 + 15(2.78)^3\ [\text{Nm}] = 36\,328\ \text{Nm} \qquad \boldsymbol{M_{(14.78)} = 36\,328\ \text{Nm}}$$

Se definen los valores de los momentos en los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, así:

Punto *A*, $x = 0$: $\boldsymbol{M_{(0)} = 0}$

Punto *B*, $x = 6$ m: $M_{(6)} = 3\,123x^1\ \text{Nm} = 3\,123(6)\ \text{Nm} = 18\,738\ \text{Nm}$ $\boldsymbol{M_{(6)} = 18\,738\ \text{Nm}}$

Punto *C*, $x = 12$ m: $M_{(12)} = 3\,123x^1 - 15(x-6)^3[\text{Nm}] = 3\,123(12) - 15(6)^3[\text{Nm}] = 34\,236\ \text{Nm}$

$\boldsymbol{M_{(12)} = 34\,236\ \text{Nm}}$

Punto *D*, $x = 16$ m: $M_{(16)} = 3\,123x^1 - 15(x-6)^3 + 15(x-12)^3[\text{Nm}]$

$= 3\,123(16) - 15(10)^3 + 15(4)^3\ [\text{Nm}] = 35\,928\ \text{Nm}$ $\boldsymbol{M_{(16)} = 35\,928\ \text{Nm}}$

Punto *E*, $x = 25$ m: $M_{(25)} = 3\,123x^1 - 15(x-6)^3 + 15(x-12)^3 + 10(x-16)^3[\text{Nm}]$

$= 3\,123(25) - 15(19)^3 + 15(13)^3 + 10(9)^3\ [\text{Nm}] = 15\,435\ \text{Nm}$ $\boldsymbol{M_{(25)} = 15\,435\ \text{Nm}}$

Punto *F*, $x = 30$ m: $M_{(30)} = 3\,123x^1 - 15(x-6)^3 + 15(x-12)^3 + 10(x-16)^3 - 10(x-25)^3\ [\text{Nm}]$

$= 3\,123(30) - 15(24)^3 + 15(18)^3 + 10(14)^3 - 10(5)^3[\text{Nm}] = 0$ $\boldsymbol{M_{(30)} = 0}$

Teniendo en cuenta la naturaleza de la función en cada intervalo y los valores hallados, se realiza el diagrama de momentos, indicado en la figura 8.55(b).

8.10.4 Ejemplo 8.11

En relación con la viga *ABCDE* con la carga distribuida como se indica en la figura 8.56, enunciar las ecuaciones de singularidad correspondientes y emplearlas para determinar los valores de *V* y de *M*, en los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, así como en el punto donde el momento alcanza el valor máximo, y elaborar, además, los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores.

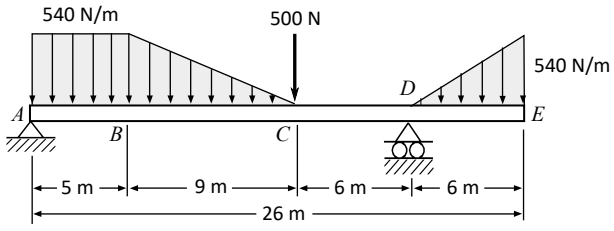


Figura 8.56

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga *ABCDE* y se hallan los valores de las reacciones en A = 3 646.5 N y D = 3 603.5 N, como se aprecia en la figura 8.57.

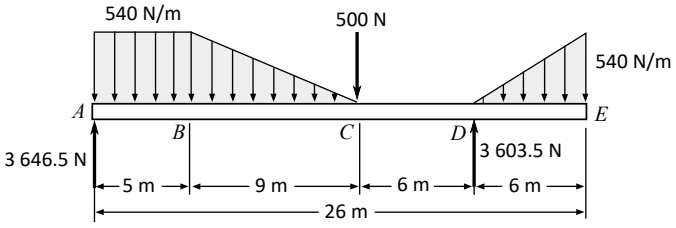


Figura 8.57

Se observa en la figura 8.57 que la viga *ABCDE* contiene dos cargas distribuidas relacionadas como sigue:

— *Puntos A, B y C:* carga uniforme desde A hasta B y decreciente hasta C, la cual se identifica como el caso 3.6, ecuación 8.20, tomando a = 0, c = 5 m y e = 14 m, por lo tanto, omitiendo unidades, queda expresada así:

$$w(x) = w_o\langle x-a\rangle^0 - \frac{w_o}{d}\langle x-c\rangle^1 + \frac{w_o}{d}\langle x-e\rangle^1 \tag{1}$$

$$w(x) = 540\langle x\rangle^0 - \frac{540}{9}\langle x-5\rangle^1 + \frac{540}{9}\langle x-14\rangle^1 \tag{2}$$

— *Puntos D y E:* carga creciente desde D hasta el extremo derecho E, equivalente al caso 2.6, ecuación 8.12, siendo a = 20 m, la cual al omitir las unidades queda así:

$$w(x) = \frac{w_o}{b}\langle x-a\rangle^1 \tag{3}$$

$$w(x) = \frac{540}{6}\langle x-20\rangle^1 \tag{4}$$

La carga distribuida resultante queda definida, al sumar las ecuaciones 2 y 4, mediante la siguiente función:

$$w(x) = 540\langle x\rangle^0 - \frac{540}{9}\langle x-5\rangle^1 + \frac{540}{9}\langle x-14\rangle^1 + \frac{540}{6}\langle x-20\rangle^1$$

Al integrar e invertir los signos de *w(x)* y adicionar las cargas puntuales, para determinar *V(x)*, se tiene:

$$V(x) = 3\,646.5\langle x\rangle^0 - 540\langle x\rangle^1 + 30\langle x-5\rangle^2 - 500\langle x-14\rangle^0 - 30\langle x-14\rangle^2 + 3\,603.5\langle x-20\rangle^0 - 45\langle x-20\rangle^2$$

Al integrar nuevamente:

$$M(x) = 3\,646.5\langle x\rangle^1 - 270\langle x\rangle^2 + 10\langle x-5\rangle^3 - 500\langle x-14\rangle^1 - 10\langle x-14\rangle^3 + 3\,603.5\langle x-20\rangle^1 - 15\langle x-20\rangle^3$$

Se calculan las fuerzas cortantes en los puntos clave *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, así:

Punto *A*, $x = 0$: $V_{(0)} = A = 3\,646.5$ N $\quad \boldsymbol{V_{(0)} = 3646.5\ \mathbf{N}}$

Punto *B*, $x = 5$ m: $V_{(5)} = 3\,646.5x^0 - 540x^1$ [N] $= 3\,646.5 - 540(5)$ [N] $= 946.5$ N $\quad \boldsymbol{V_{(5)} = 946.5\ \mathbf{N}}$

Punto *C*, $x = 14$ m: $V_{(14)} = 3\,646.5x^0 - 540x^1 + 30(x-5)^2$ [N]

$= 3\,646.5 - 540(14) + 30(9)^2$ [N] $= -1\,483.5$ N $\quad \boldsymbol{V_{(14)} = -1\,483.5\ \mathbf{N}}$

Punto *D*, $x = 20$ m, $V_{(20)} = 3\,646.5x^0 - 540x^1 + 30(x-5)^2 - 500(x-14)^0 - 30(x-14)^2$ [N]

$= 3\,646.5 - 540(20) + 30(15)^2 - 500 - 30(6)^2$ [N] $= -1\,983.5$ N $\quad \boldsymbol{V_{(20)} = -1\,983.5\ \mathbf{N}}$

Punto *E*, $x = 26$ m:

$$V_{(26)} = 3\,646.5x^0 - 540x^1 + 30(x-5)^2 - 500(x-14)^0 - 30(x-14)^2 + 3\,603.5(x-20)^0 - 45(x-20)^2\text{[N]}$$

$$= 3\,646.5 - 540(26) + 30(21)^2 - 500 - 30(12)^2 + 3\,603.5 - 45(6)^2\ \text{[N]} = 0 \qquad \boldsymbol{V_{(26)} = 0}$$

Con la información obtenida en los puntos anteriores y conforme a la naturaleza de la función *V(x)* en cada intervalo, se elabora el diagrama mostrado en la figura 8.58(a). Se aprecia que el cortante pasa por cero en el intervalo de los puntos *B* y *C*, así como también en el punto *D*, los cuales se analizan a continuación para determinar los valores de x con sus respectivos momentos.

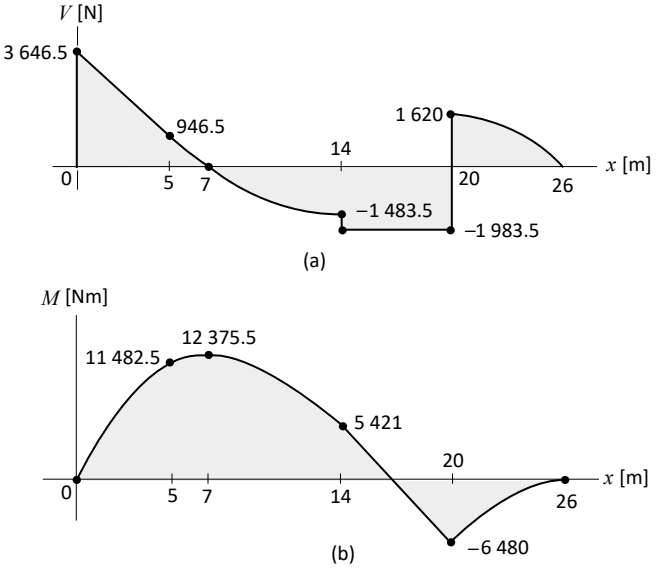


Figura 8.58

Intervalo *B* y *C*, (5 m < x < 14 m):

$$V(x) = 3\,646.5x^0 - 540x^1 + 30(x-5)^2 = 0$$

$$3\,646.5 - 540x + 30(x-5)^2 = 0 \qquad 3\,646.5 = 540x - 30(x-5)^2$$

$$3\,646.5/30 = 540/30\,x - (x-5)^2 \qquad 121.55 = 18x - (x^2 - 10x + 25)$$

$$121.55 = 18x - x^2 + 10x - 25 \qquad x^2 - 28x + 146.55 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4(1)(146.55)}}{2(1)} = \frac{28 \pm 14.06}{2}$$

$$x = 21 \text{ m} \quad o \quad x = 7 \text{ m}$$

Se descarta el valor de x = 21 m, por no estar dentro del intervalo requerido, por lo tanto, se toma x = 7 m y se determina el respectivo momento, así:

$$M(x) = 3\,646.5x^1 - 270x^2 + 10(x-5)^3$$

$$M_{(7)} = 3\,646.5(7) - 270(7)^2 + 10(2)^3 = 12\,375.5 \text{ Nm} \qquad \boldsymbol{M_{(7)} = 12\,375.5 \text{ Nm}}$$

Se calculan los momentos en los puntos A, B, C, D y E, como sigue:

$$\text{Punto } A,\ x = 0\text{: } \boldsymbol{M_{(0)} = 0}$$

$$\text{Punto } B,\ x = 5 \text{ m: } M_{(5)} = 3\,646.5x^1 - 270x^2 \text{ [Nm]} = 3\,646.5(5) - 270(5)^2 \text{ [Nm]} = 11\,482.5 \text{ Nm}$$

$$\boldsymbol{M_{(5)} = 11\,482.5 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } C,\ x = 14\text{m: } M_{(14)} = 3\,646.5x^1 - 270x^2 + 10(x-5)^3\text{[Nm]}$$

$$= 3\,646.5(14) - 270(14)^2 + 10(9)^3 \text{ [Nm]} = 5\,421 \text{ Nm} \qquad \boldsymbol{M_{(14)} = 5\,421 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } D,\ x = 20 \text{ m: } M_{(20)} = 3\,646.5x^1 - 270x^2 + 10(x-5)^3 - 500(x-14)^1 - 10(x-14)^3 \text{ [Nm]}$$

$$= 3\,646.5(20) - 270(20)^2 + 10(15)^3 - 500(6) - 10(6)^3 \text{ [Nm]} = -6\,480 \text{ Nm} \qquad \boldsymbol{M_{(20)}}$$

$$\boldsymbol{= -6\,480 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } E,\ x = 26 \text{ m:}$$

$$M_{(26)} = 3\,646.5x^1 - 270x^2 + 10(x-5)^3 - 500(x-14)^1 - 10(x-14)^3 + 3\,603.5(x-20)^1$$

$$- 15(x-20)^3\text{[Nm]}$$

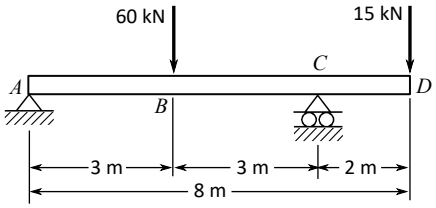
$$= 3\,646.5(26) - 270(26)^2 + 10(21)^3 - 500(12) - 10(12)^3 + 3\,603.5(6) - 15(6)^3 \text{ [Nm]} = 0$$

$$\boldsymbol{M_{(26)} = 0}$$

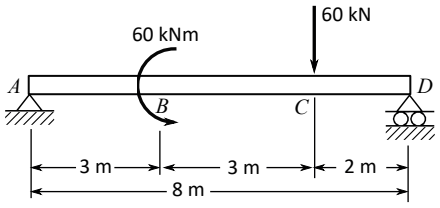
Con base en los datos anteriores, se elabora el diagrama de momentos, como se ilustra en la figura 8.58(b).

8.11 Problemas propuestos

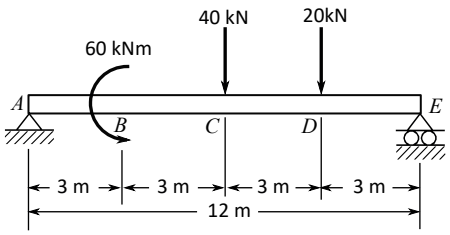
Problemas 8.1 hasta 8.22. Para cada una de las vigas cargadas como se indica en las respectivas figuras, hallar las reacciones en los apoyos, expresar las funciones de singularidad y aplicarlas para calcular los valores correspondientes de cortantes y de momentos en los puntos A, B, C, etc., el momento máximo y el punto donde ocurre, así como dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores.



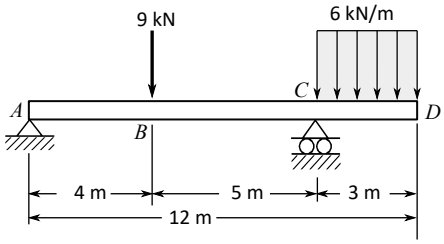
Problema 8.1



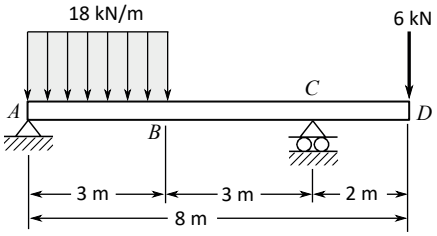
Problema 8.2



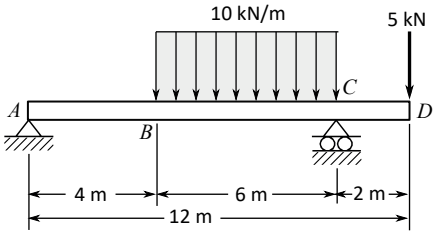
Problema 8.3



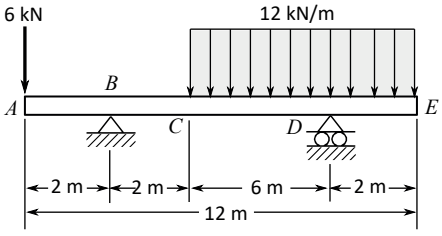
Problema 8.4



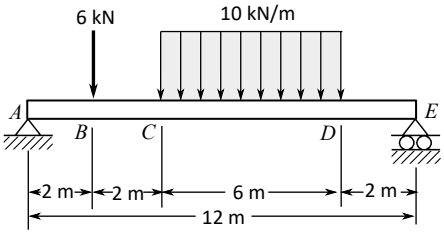
Problema 8.5



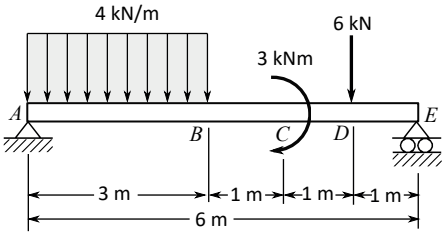
Problema 8.6



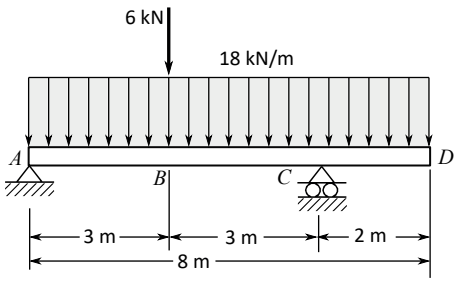
Problema 8.7



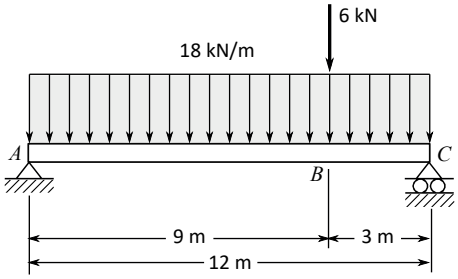
Problema 8.8



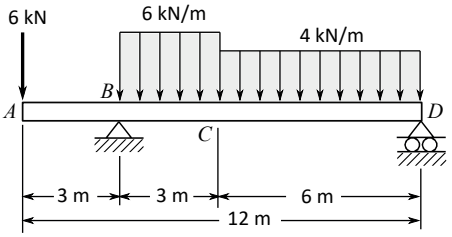
Problema 8.9



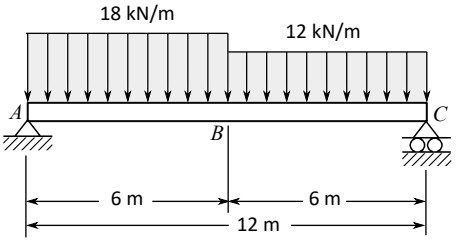
Problema 8.10



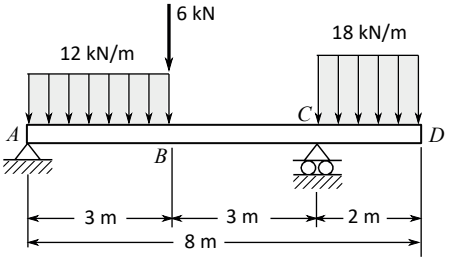
Problema 8.11



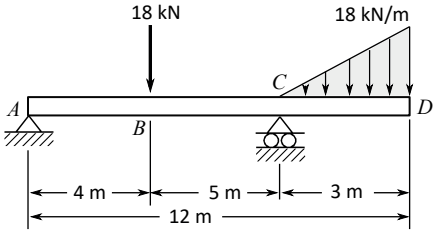
Problema 8.12



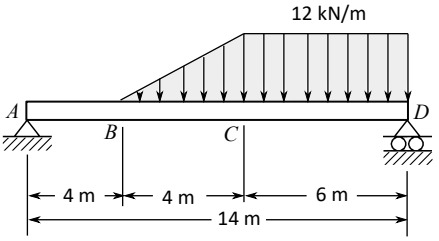
Problema 8.13



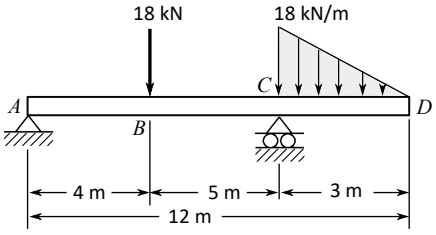
Problema 8.14



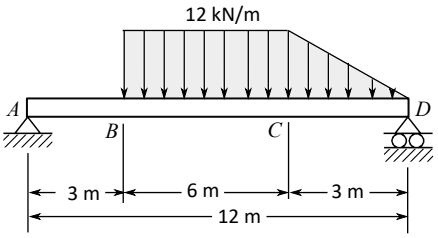
Problema 8.15



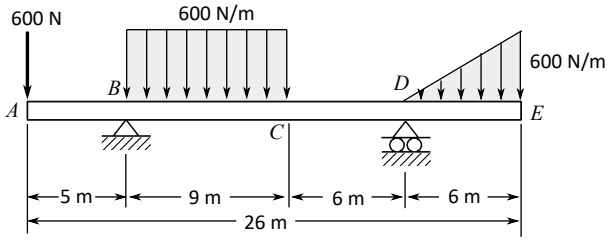
Problema 8.16



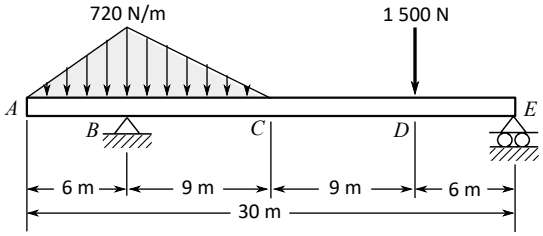
Problema 8.17



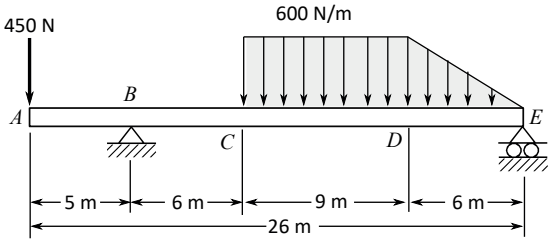
Problema 8.18



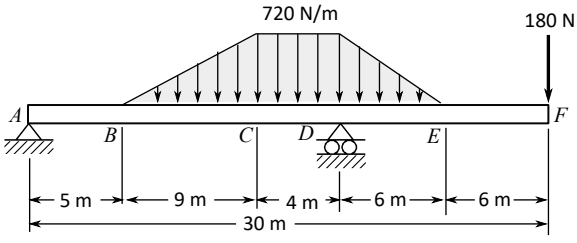
Problema 8.19



Problema 8.20



Problema 8.21



Problema 8.22

Fricción

9

Objetivos del capítulo

- Analizar el fenómeno de la fricción y su influencia en las situaciones habituales.
- Estudiar las leyes y características de la fricción seca.
- Analizar el equilibrio de cuerpos sometidos a fuerzas donde intervienen fuerzas de fricción.

9.1 Introducción y antecedentes

La *fricción* es un fenómeno físico que abordamos en casi todas las situaciones de la vida diaria. En unas, resulta conveniente y la usamos a nuestro favor, y en otras, optamos mejor por reducirla o eliminarla completamente, si es posible.

Cuando se introduce un clavo en la pared o se enchufa el terminal del cable de un electrodoméstico, la fricción ayuda a que se mantenga en su lugar. La fricción también es necesaria cuando pisamos en el suelo y nos impulsamos para caminar; y lo mismo sucede cuando las ruedas de un vehículo se apoyan en el pavimento para poder avanzar, por eso se afirma que el desplazamiento se hace más eficiente y seguro cuando la fuerza de fricción entre las ruedas y el pavimento es más alta, caso contrario, es conocido que cuando el pavimento está mojado, lo cual disminuye la fricción, la respuesta a la conducción no es la mejor y puede llevar a que ocurran accidentes.

La acción de frenado de un vehículo también requiere de una gran fricción, por lo cual se busca aumentar sus valores en el sistema de frenos; en cambio, en otros mecanismos, como en la caja de velocidades, entre otros, se requiere más bien disminuirla al máximo,

porque impide el libre movimiento de las partes, y para ese efecto se adicionan lubricantes entre los elementos en contacto, como aceite o grasa.

Por las anteriores razones, se distinguen básicamente dos tipos de fricción:

— *Fricción lubricada:* cuando entre las partes en rozamiento se aplican sustancias para disminuir sus efectos.
— *Fricción seca:* cuando entre las superficies en contacto no existen sustancias adicionales.

Como referentes históricos del estudio de la fricción se puede mencionar inicialmente a Leonardo da Vinci, en 1492, cuando descubrió que la fricción es una fuerza directamente proporcional a la carga, o fuerza con que se presionan las superficies, después a Guillaume Amontons, en 1699, cuando definió formalmente las leyes que rigen el comportamiento de la fricción, a lo cual se le sumó la comprobación de estas leyes por parte de Charles-Augustin de Coulomb, en 1781, además de establecer la diferencia entre una fricción estática y otra dinámica.

9.2 Leyes de la fricción seca

Para empezar a entender el fenómeno de la fricción y las leyes que la gobiernan, se puede realizar el siguiente experimento: se aplica una fuerza $\vec{P}$ para intentar mover una caja de peso $\vec{W}$, con dimensiones $(a)(b)(h)$, la cual reposa sobre una superficie de apoyo, mediante el área de contacto $A = (a)(b)$, como se aprecia en la figura 9.1(a), por lo que, en consecuencia, se presenta una fuerza $\vec{F}$, que se resiste al movimiento, denominada *fuerza de fricción*.

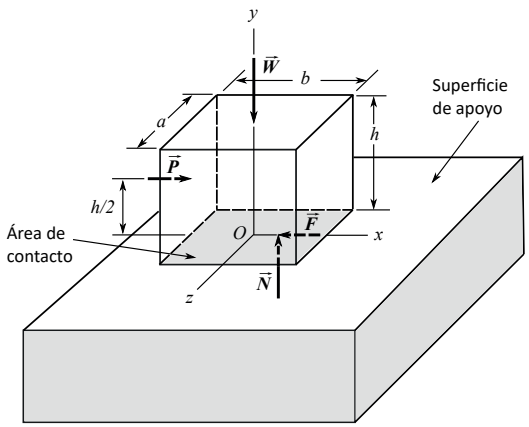


Figura 9.1

Inicialmente, cuando la fuerza $\vec{P}$ es igual a cero y en consecuencia no existe fuerza de fricción $\vec{F}$, entonces, el peso $\vec{W}$, y la fuerza normal $\vec{N}$ son iguales, de sentidos contrarios y se encuentran sobre la misma línea de acción, o eje y, como se observa en la figura 9.2(a), al cumplirse lo establecido por el principio de acción y reacción, expresado mediante la tercera ley de Newton.

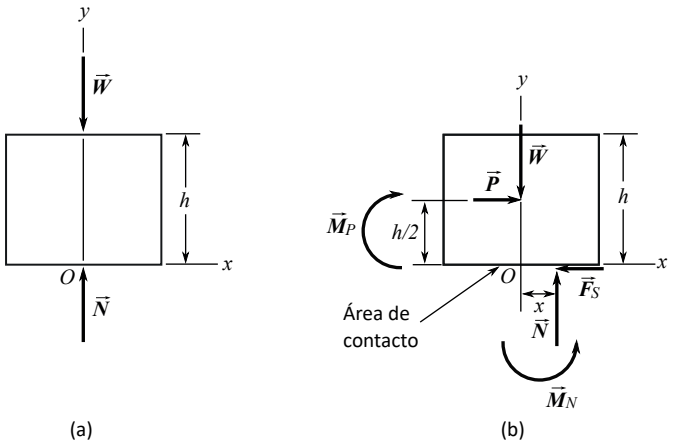


Figura 9.2

Se va incrementando la fuerza $\vec{P}$, aplicada a la altura $h/2$, desde cero hasta un valor máximo, en el que la caja empieza a moverse, la cual corresponde al valor denominado *fricción estática* (F_S), como se aprecia en la figura 9.2(b).

Las fuerzas $\vec{P}$ y $\vec{F}_S$, al ser iguales y de sentidos contrarios, forman un par de momento $M_P = (F_S)(h/2)$, que intenta voltear la caja en el sentido de las manecillas del reloj, por tal razón, la línea de acción de la fuerza normal $\vec{N}$ se traslada la distancia x, para generar un par de momento $M_N = (N)(x)$, igual y de sentido opuesto, para compensar dicha acción de volteo.

Superado el valor de fricción máxima o fricción estática (F_S), la caja entra en movimiento, el cual se mantiene, aunque se le aplique una fuerza menor, denominada *fricción cinética* (F_K). Dicho comportamiento se describe en la gráfica de fuerza de fricción F versus fuerza aplicada P, como se indica en la figura 9.3, en donde se diferencian dos zonas: la de fricción estática, según la cual el valor de la fuerza de fricción F desarrollada por las superficies en contacto permanece en equilibrio con la magnitud de la fuerza aplicada P, hasta llegar a un punto máximo en el cual la fuerza resistente baja súbitamente y el cuerpo empieza a moverse, entonces pasa a la otra zona, la de fricción cinética.

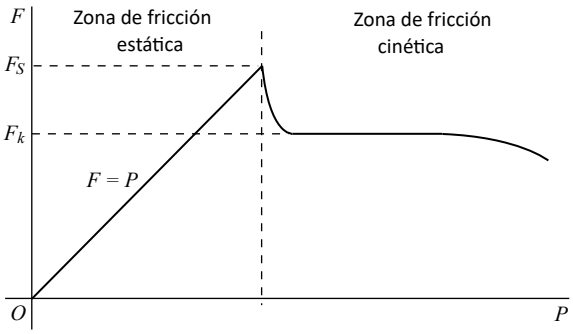


Figura 9.3

Experimentalmente se demuestra que el valor de la fuerza de fricción estática F_S es directamente proporcional a la magnitud de fuerza normal N, existente en las superficies en contacto, lo cual responde a la siguiente expresión:

$$F_S = u_S N \tag{9.1}$$

Siendo u_S la constante de proporcionalidad denominada coeficiente de fricción estático.

Una relación similar se puede hallar entre la fricción cinética F_k y la fuerza normal N, dada así:

$$F_K = u_K N \tag{9.2}$$

En donde la constante de proporcionalidad u_K se llama coeficiente de fricción cinética.

Los coeficientes de fricción, tanto estático u_S como cinético u_K, se miden para cada par de materiales en contacto, con valores que van desde 0 hasta 1 y representan un porcentaje de la fuerza normal N, o fuerza con la cual se presionan las superficies en contacto. Se ha encontrado que los valores de u_K son aproximadamente un 25 % menores que los de u_S correspondientes.

En la tabla 9.1 se muestran valores típicos de u_S y de u_K para diferentes materiales, los cuales se pueden usar en términos generales, aunque para obtener datos más precisos es necesario recurrir a experimentos específicos, puesto que en el fenómeno de la fricción influyen muchas variables, como las condiciones ambientales de temperatura o humedad del aire, además del estado de las superficies.

Las leyes y características de la fricción seca se pueden resumir en las siguientes:

— La fricción es una fuerza que se opone al movimiento relativo entre dos superficies en contacto y, por lo tanto, se manifiesta como una fuerza de reacción; además, se afirma que es una fuerza tangencial, porque actúa en dirección paralela a dichas superficies.

— La magnitud de la fuerza de fricción es directamente proporcional a la fuerza con que se presionan las superficies y es prácticamente independiente del área de contacto.
— La fuerza de fricción cinética es independiente de la velocidad relativa de las superficies en contacto y es ligeramente inferior a la fuerza de fricción estática, desarrollada por las mismas superficies.
— La teoría más aceptada acerca de la naturaleza de la fuerza de fricción explica que se debe a las rugosidades presentes en las superficies en contacto y a la existencia de fuerzas electromagnéticas entre los materiales, aunque los fundamentos enteramente satisfactorios todavía son en la actualidad objeto de estudio entre los investigadores.

Tabla 9.1

Superficies en contacto		
acero-latón	0.5	0.4
acero-teflón	0.04	0.04
caucho-cemento	0.3	0.25
madera-cuero	0.5	0.4
madera-piedra	0.7	0.3
madera-metal	0.4	0.2

9.2.1 Ejemplo 9.1

Una caja de 120 lb se encuentra sobre un plano inclinado, como se indica en la figura 9.4, siendo $u_S = 0.4$. Determinar: *a*) la magnitud de la fuerza horizontal máxima *P* para que la caja no se desplace hacia arriba y *b*) el valor de la fuerza horizontal mínima *P* necesaria para evitar que la caja se deslice hacia abajo.

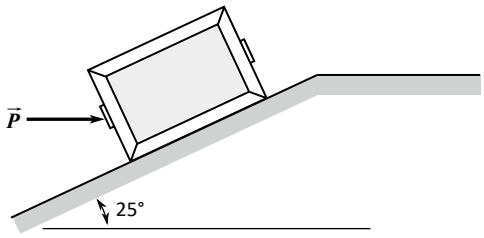


Figura 9.4

Análisis preliminar

Desde el punto de vista de la fuerza de fricción, se pueden analizar tres situaciones de equilibrio, que se ilustran mediante los diagramas de cuerpo libre de la figura 9.5, considerando que la caja no va a presentar acciones de volteo, así:

— *Posición intermedia:* en donde la caja se considera en equilibrio, independiente de la fuerza de fricción, sometida solo a las tres fuerzas: $\vec{P}$, $\vec{W}$, y $\vec{N}$, para lo cual se establecen los ejes *x* y *y*, de forma paralela y perpendicular al plano, respectivamente, como se indica en la figura 9.5(b), siendo $\vec{F}_s = 0$.
— *Fuerza máxima de fricción negativa:* representada por un vector de magnitud F_S, de sentido hacia abajo del plano, como se ilustra en la figura 9.5(a), la cual responde a la expresión $F_S = u_S N$ y determina la magnitud de la máxima fuerza horizontal *P* requerida para que la caja no se desplace hacia arriba.
— *Fuerza máxima de fricción positiva:* representada por un vector de magnitud F_S, de sentido hacia arriba del plano, como se ilustra en la figura 9.5(c), la cual está dada mediante la relación $F_S = u_S N$ y define el valor de la fuerza horizontal mínima *P* necesaria para evitar que la caja deslice hacia abajo.

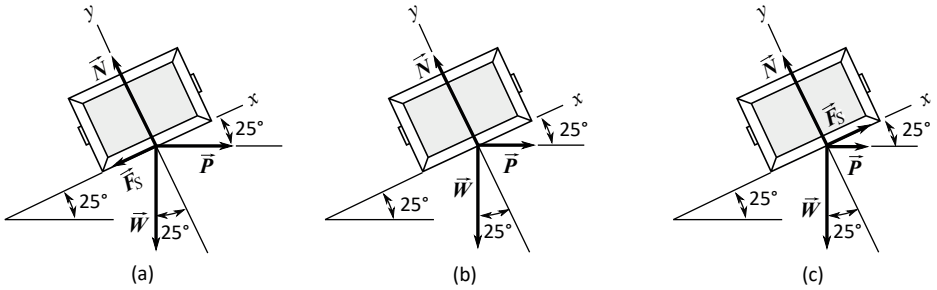


Figura 9.5

La diferencia entre las fuerzas máximas de fricción estática, positiva y negativa, determina el rango de valores en el cual la caja se encuentra en equilibrio, en relación con la fricción, siempre que no se superen dichos valores, en donde el cuerpo pasará al estado de fricción cinética y, por lo tanto, dejará de estar en equilibrio, desde el punto de vista estático.

Solución (a)

Con base en la figura 9.5(a), se descompone cada una de las fuerzas según los ejes x y y, así:

$$\vec{\boldsymbol{P}} = P\ cos\ 25°\boldsymbol{i} - P\ sen\ 25°\boldsymbol{j} = 0.906P\boldsymbol{i} - 0.422P\boldsymbol{j}$$

$$\vec{\boldsymbol{W}} = -W\ sen\ 25°\boldsymbol{i} - W\ cos\ 25°\boldsymbol{j} = -(120\ \text{lb})(0.422)\boldsymbol{i} - (120\ \text{lb})(0.906)\boldsymbol{j}$$

$$= -50.64\ \text{lb}\boldsymbol{i} - 108.72\ \text{lb}\boldsymbol{j}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_s = -F_S\boldsymbol{i} = -u_S N\boldsymbol{i} = -0.4N\boldsymbol{i}$$

$$\vec{\boldsymbol{N}} = N\boldsymbol{j}$$

Se aplican las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x + \nearrow = 0:\ 0.906P - 50.64\ \text{lb} - 0.4N = 0$$
$$0.4N = 0.906P - 50.64\ \text{lb} \qquad (1)$$

$$\sum F_y + \nwarrow = 0:\ N - 0.422P - 108.72\ \text{lb} = 0$$
$$N = 0.422P + 108.72\ \text{lb} \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2:

$$\boldsymbol{P = 128\ lb}$$

Solución (b)

Se realiza nuevamente el análisis de equilibrio según los ejes x y y, aunque ahora conforme a la figura 9.5(c), así:

$$\vec{\boldsymbol{P}} = P\ cos\ 25°\boldsymbol{i} - P\ sen\ 25°\boldsymbol{j} = 0.906P\boldsymbol{i} - 0.422P\boldsymbol{j}$$

$$\vec{\boldsymbol{W}} = -W\ sen\ 25°\boldsymbol{i} - W\ cos\ 25°\boldsymbol{j} = -(120\ \text{lb})(0.422)\boldsymbol{i} - (120\ \text{lb})(0.906)\boldsymbol{j}$$

$$= -50.64\ \text{lb}\boldsymbol{i} - 108.72\ \text{lb}\boldsymbol{j}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_s = F_S\boldsymbol{i} = u_S N\boldsymbol{i} = 0.4N\boldsymbol{i}$$

$$\vec{\boldsymbol{N}} = N\boldsymbol{j}$$

Se aplican nuevamente las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x + \nearrow = 0:\ 0.906P - 50.64\ lb + 0.4N = 0$$
$$0.4N = 50.64\ lb - 0.906P \qquad (1)$$

$$\sum F_y + \nwarrow = 0:\ N - 0.422P - 108.72\ \text{lb} = 0$$

$$N = 108.72\ lb + 0.422P \qquad (2)$$

De las ecuaciones 1 y 2 resulta:

$$\boldsymbol{P = 6.7\ \text{lb}}$$

9.2.2 Ejemplo 9.2

Un paquete de peso W = 550 N se encuentra sobre una superficie horizontal, donde u_S = 0.4 y u_K = 0.3, sometido a una fuerza $\vec{\boldsymbol{P}}$ y otra fuerza horizontal de 450 N, como se ilustra en la figura 9.6(a). Determinar la magnitud y el sentido de la fuerza de fricción desarrollada, para los casos cuando *a*) P = 480 N, *b*) P = 580 N y *c*) P = 300 N.

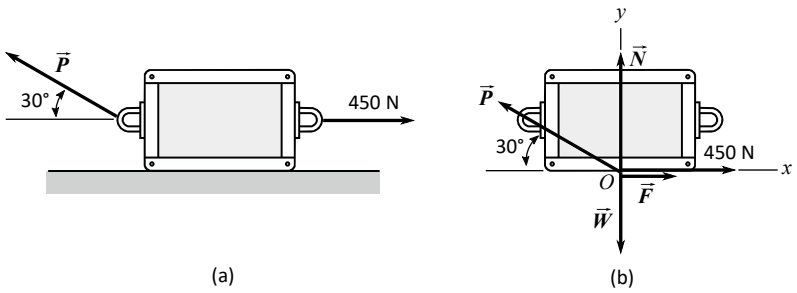


Figura 9.6

Solución (a)

Teniendo en cuenta que el paquete se encuentra libre de acciones de volteo, se elabora el diagrama de cuerpo libre ilustrado en la figura 9.6(b), estando en equilibrio bajo las fuerzas $\vec{\boldsymbol{P}}$, $\vec{\boldsymbol{N}}$, $\vec{\boldsymbol{W}}$, la horizontal de 450 N y la fuerza de fricción $\vec{\boldsymbol{F}}$, al suponer su sentido positivo respecto al eje de las x, para corregirla después, de acuerdo con los resultados.

Se toma sumatoria de fuerzas en el eje x, así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0:\ 450\ \text{N} + F - P\ cos\ 30° = 0$$

Al reemplazar P = 480 N y despejar F, se tiene:

$$F = P\ cos\ 30° - 450\ \text{N} = (480\ \text{N})\ cos\ 30° - 450\ \text{N} = -34.3\ \text{N} \qquad \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{34.3\ \text{N}} \leftarrow$$

El valor anterior indica que el paquete, bajo las fuerzas dadas, siendo P = 480 N, desarrolla una fuerza de fricción de magnitud F = 34.3 N de sentido hacia la izquierda, requerida para mantener el equilibrio. Falta verificar si no excede la fuerza máxima de fricción estática $\vec{F}_s$, por lo cual pasaría al estado de fricción cinética. Para averiguarlo, se toma sumatoria de fuerzas en el eje y, así:

$$\sum F_y + \uparrow = 0: \; N + P\,sen\,30° - W = 0 \qquad N = W - P\,sen\,30° = 550\text{ N} - (480\text{ N})\,sen\,30° = 310\text{ N}$$

O sea que:

$$F_S = u_S N = 0.4(310\text{ N}) = 124\text{ N}$$

Dado que $F < F_S$, entonces el paquete se encuentra en fricción estática, por lo que el valor de F hallado es correcto.

Solución (b)

Se toma sumatoria de fuerzas en el eje x, así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: \; 450\text{ N} + F - P\,cos\,30° = 0$$

Al sustituir P = 580 N y despejar F, se da:

$$F = P\,cos\,30° - 450\text{ N} = (580\text{ N})\,cos\,30° - 450\text{ N} = 52.3\text{ N} \qquad \vec{F} = \mathbf{52.3\ N} \rightarrow$$

Se toma sumatoria de fuerzas en el eje y, para verificar si $F < F_S$, así:

$$\sum F_y + \uparrow = 0: \; N + P\,sen\,30° - W = 0 \qquad N = W - P\,sen\,30° = 550\text{ N} - (580\text{ N})\,sen\,30° = 260\text{ N}$$

Por lo tanto:

$$F_S = u_S N = 0.4(260\text{ N}) = 104\text{ N}$$

Al ser $F < F_S$, la fuerza de fricción $\vec{F}$ con sentido hacia la derecha es correcta.

Solución (c)

Se toma sumatoria de fuerzas en el eje x, así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: \; 450\text{ N} + F - P\,cos\,30° = 0$$

Al reemplazar P = 300 N y despejar F, se tiene:

$$F = P\,cos\,30° - 450\text{ N} = (300\text{ N})\,cos\,30° - 450\text{ N} = -190.2\text{ N} \qquad \vec{F} = \mathbf{190.2\ N} \leftarrow$$

Se toma sumatoria de fuerzas en el eje y, para verificar si $F < F_S$, así:

$$\sum F_y + \uparrow = 0: \; \text{N} + P\,sen\,30° - W = 0 \qquad N = W - P\,sen\,30° = 550\text{ N} - (300\text{ N})\,sen\,30° = 400\text{ N}$$

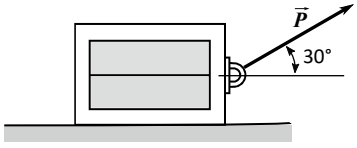
$$F_S = u_S N = 0.4(400\text{ N}) = 160\text{ N}$$

Debido a que $F > F_S$, o sea, la fuerza de fricción desarrollada supera el valor estático, el cuerpo entra en movimiento al pasar al estado de fricción cinética, siendo su verdadero valor:

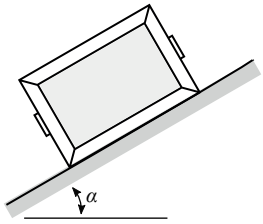
$$F_k = u_k N = 0.3(400\text{ N}) = 120\text{ N} \quad \vec{F} = \mathbf{120\ N} \leftarrow$$

9.3 Problemas propuestos

Problema 9.1. Determinar la magnitud de la fuerza $\vec{P}$ necesaria para que el bloque de peso W = 450 N, mostrado en la figura, intente moverse, siendo u_S = 0.4.



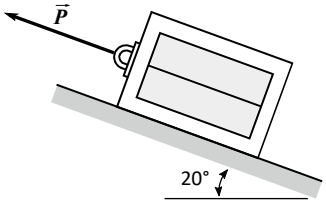
Problema 9.1



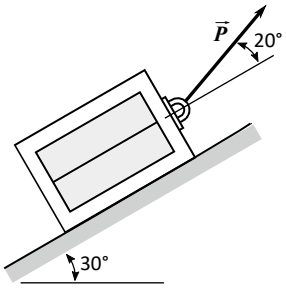
Problema 9.2

Problema 9.2. Un paquete de 80 lb es colocado sobre un plano inclinado, como se ilustra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática es u_S = 0.6, determinar: *a*) el máximo ángulo de inclinación α para que el paquete no deslice y *b*) el correspondiente valor de la fuerza de fricción.

Problema 9.3. Un bloque de peso W = 500 N reposa sobre un plano inclinado, siendo u_S = 0.25, sobre el cual actúa una fuerza $\vec{P}$ paralela al plano, como se indica en la figura. Determinar la magnitud y el sentido de la fuerza de fricción presente en los casos *a*) P = 200 N y *b*) P = 140 N.



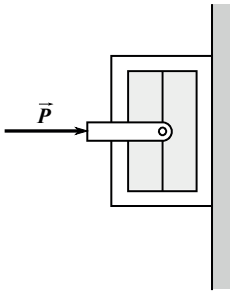
Problema 9.3



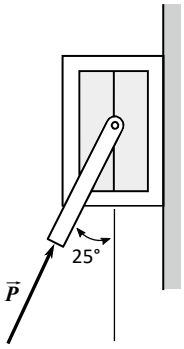
Problema 9.4

Problema 9.4. El bloque de peso W = 600 N descansa sobre una superficie inclinada, como se indica en la figura, en donde u_S = 0.25, *a*) ¿cuál es el valor de la fuerza $\vec{P}$ necesaria para que empiece a deslizar hacia arriba?, *b*) ¿cuál es el valor para que intente moverse hacia abajo?, y *c*) ¿cuál es la magnitud de $\vec{P}$ para que el cuerpo se encuentre en equilibrio independiente de la fricción?

Problema 9.5. Determinar la magnitud de la fuerza mínima horizontal $\vec{P}$ necesaria para mantener el cuerpo de peso W = 120 lb contra una pared, siendo u_S = 0.4.



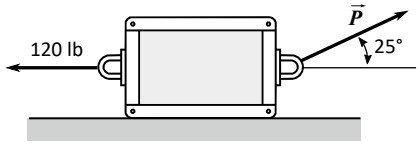
Problema 9.5



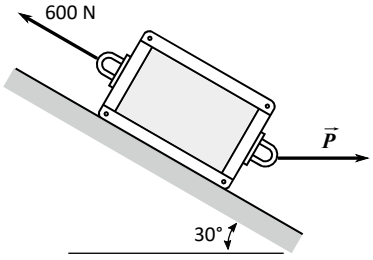
Problema 9.6

Problema 9.6. Determinar el valor de la fuerza $\vec{P}$ mínima necesaria para mantener en la posición mostrada el cuerpo de peso W = 140 lb contra una pared, siendo u_S = 0.4.

Problema 9.7. Un paquete de 150 lb se encuentra sobre una superficie horizontal, donde u_S = 0.4 y u_K = 0.3, sometido a una fuerza $\vec{P}$ y otra fuerza horizontal de 120 lb, como se indica en la figura. Determinar la magnitud y el sentido de la fuerza de fricción desarrollada, para los casos *a*) P = 100 lb, *b*) P = 160 lb y *c*) P = 180 lb.



Problema 9.7



Problema 9.8

Problema 9.8. Un paquete de peso $W = 500$ N se encuentra sobre plano inclinado, donde $u_S = 0.4$ y $u_K = 0.3$, sometido a una fuerza de 600 N paralela al plano y a otra fuerza $\vec{P}$ horizontal, como se ilustran en la figura. Determinar la magnitud y el sentido de la fuerza de fricción desarrollada, para los casos *a*) $P = 450$ N, *b*) $P = 560$ N y *c*) $P = 350$ N.

Problema 9.9. La barra *AB* de peso $\vec{W}$ y longitud *L* se encuentra apoyada como se indica en la figura. Si la fuerza $\vec{P} = 0$ y el coeficiente de fricción estático entre la barra y el piso es 0.4, ¿cuál es el mínimo ángulo requerido para que la barra se incline sin deslizar? Considere despreciable el coeficiente de fricción estático entre la barra y la pared.

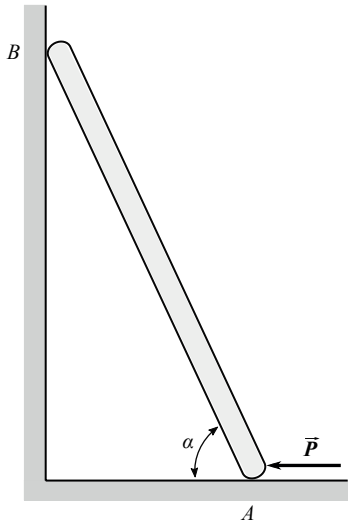
Problema 9.10. La barra *AB* de peso $\vec{W}$ y longitud *L* se encuentra inclinada un ángulo $\alpha = 45°$, como se indica en la figura. Si la fuerza $\vec{P} = 0$ y el coeficiente de fricción estático entre la barra y el piso es 0.4, determinar el mínimo coeficiente de fricción estático u_S entre la barra y la pared para que no deslice.

Problema 9.11. La barra *AB* de peso 60 lb y longitud *L* se encuentra apoyada como se indica en la figura. Si el coeficiente de fricción estático entre la barra y el piso es 0.4 y el ángulo de inclinación $\alpha = 40°$, ¿cuál es el mínimo valor de la fuerza horizontal *P* para que la barra no deslice? Considere despreciable el coeficiente de fricción estático entre la barra y la pared.

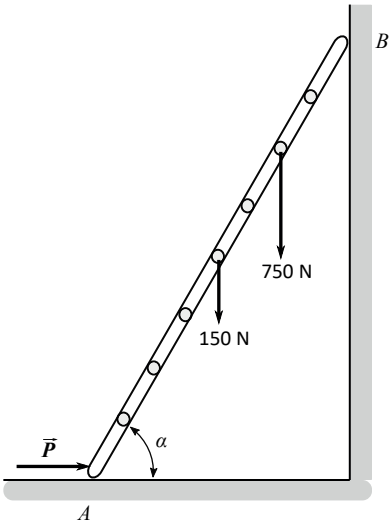
Problema 9.12. Una escalera *AB* de peso 150 N y longitud *L* es apoyada como se indica en la figura. Si la fuerza $\vec{P} = 0$ y los coeficientes de fricción estática entre la escalera con la pared y el piso son respectivamente 0.3 y 0.4, determinar el ángulo de inclinación α mínimo para que la escalera no deslice si una persona de peso 750 N sube hasta la posición a ¾ de *L* y el centro de gravedad de la escalera está a ½ de *L*.

Problema 9.13. Una escalera AB de peso 150 N y longitud L se encuentra inclinada un ángulo $\alpha = 58°$, como se indica en la figura. Si la fuerza $\vec{P} = 0$ y el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el piso es 0.4, determinar el coeficiente de fricción estático mínimo entre la escalera y la pared para que la escalera no deslice si una persona de peso 750 N se sube hasta la posición a ¾ de *L* y el centro de gravedad de la escalera está a ½ de *L*.

Problema 9.14. Una escalera *AB* de peso 150 N y longitud *L* se encuentra inclinada un ángulo $\alpha = 60°$, como se indica en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre la escalera y la pared es 0.3, ¿cuál es el mínimo valor de la fuerza horizontal *P* para que la escalera no deslice si una persona de peso 750 N se sube hasta la posición a ¾ de *L* y el centro de gravedad de la escalera está a ½ de *L*? Considere despreciable el coeficiente de fricción estático entre la escalera y el piso.



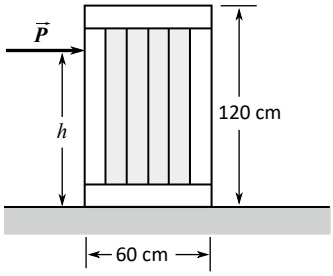
Problemas 9.9, 9.10 y 9.11



Problemas 9.12, 9.13 y 9.14

Problema 9.15. Una caja de 500 N de peso, con medidas como se indica en la figura y centro de gravedad en su centro geométrico, reposa sobre una superficie con u_S = 0.4 y u_K = 0.3. *a*) Calcular la fuerza de fricción desarrollada para una fuerza P = 220 N y *b*) determinar si a la altura h = 60 cm, correspondiente a la aplicación de $\vec{P}$, la caja se voltea o no, antes de deslizar.

Problema 9.16. Una caja de 600 N de peso, con medidas como se indica en la figura y centro de gravedad en su centro geométrico, reposa sobre una superficie con u_S = 0.4. Determinar: *a*) el valor máximo de la fuerza P para que no se mueva y *b*) la altura máxima h correspondiente a la aplicación de $\vec{P}$ para que no se voltee.



Problemas 9.15 y 9.16

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 2

2.6 $\vec{\boldsymbol{F}} = 38.3\boldsymbol{i} + 86.6\boldsymbol{j} + 32.14\boldsymbol{k}$ [N].

2.7 $\vec{\boldsymbol{F}} = 40\boldsymbol{i} + 120\boldsymbol{j} + 30\boldsymbol{k}$ [N].

2.8 $\vec{\boldsymbol{F}} = 60\boldsymbol{i} + 120\boldsymbol{j} + 40\boldsymbol{k}$ [N].

2.9 $T_{BA} = 73.71$ lb; $T_{BC} = 65.2$ lb.

2.11 $\vec{\boldsymbol{T}}_{CB} = 120$ N ↖; $\vec{\boldsymbol{F}}_{CA} = 62.1$ N ↗.

2.12 $\vec{\boldsymbol{T}}_{CB} = 161.6$ N ↖; $\vec{\boldsymbol{F}}_{CA} = 63.8$ N ↘.

2.13 $\vec{\boldsymbol{T}}_{CB} = 390.4$ N ↖; $\vec{\boldsymbol{F}}_{CA} = 302$ N ↘.

2.14 (a) $\vec{\boldsymbol{F}}_{BA} = 57.73$ N →; $\vec{\boldsymbol{F}}_{BC} = 115.47$ N ↖. (b) $\vec{\boldsymbol{F}}_{BA} = 57.73$ N ←; $\vec{\boldsymbol{F}}_{BC} = 115.47$ N ↘.

2.15 (a) $\vec{\boldsymbol{F}}_{BA} = 53.18$ N ↘; $\vec{\boldsymbol{F}}_{BC} = 134.67$ N ↖. (b) $\vec{\boldsymbol{F}}_{BA} = 53.18$ N ↖; $\vec{\boldsymbol{F}}_{BC} = 134.67$ N ↘.

2.16 (a) $\vec{\boldsymbol{F}}_{BA} = 50$ N ↗; $\vec{\boldsymbol{F}}_{BC} = 86.6$ N ↖. (b) $\vec{\boldsymbol{F}}_{BA} = 50$ N ↙; $\vec{\boldsymbol{F}}_{BC} = 86.6$ N ↘.

2.18 $\vec{\boldsymbol{R}}_C = 45.9$ lb ↖; $\vec{\boldsymbol{R}}_D = 45.9$ lb ↖; $\vec{\boldsymbol{R}}_E = 131$ lb ↗.

2.19 $T_{AB} = 87.5$ N; $T_{AC} = 74.45$ N; $T_{AD} = 58$ N.

2.20 $T_{AC} = 89.34$ N; $T_{AD} = 69.63$ N; $W = 210$ N.

2.21 $T_{AB} = 70.52$ N; $T_{AD} = 46.76$ N; $W = 141$ N.

2.22 $T_{AB} = 84.45$ N; $T_{AC} = 71.85$ N; $W = 168.9$ N.

2.23 $T_{AB} = 116.67$ lb; $T_{AC} = 114.53$ lb; $T_{AD} = 183.25$ lb.

2.24 $T_{AC} = 61.85$ lb; $T_{AD} = 98.96$ lb; $W = 216$ lb.

2.25 $T_{AB} = 104.92$ lb; $T_{AD} = 164.8$ lb; $W = 359.72$ lb.

2.26 $T_{AB} = 84$ lb; $T_{AC} = 82.5$ lb; $W = 288.13$ lb.

2.27 $T_{AC} = 52.8$ lb; $T_{AD} = 67.2$ lb; $F_V = 144$ lb.

2.28 $T_{AB} = 90$ lb; $T_{AD} = 84$ lb; $F_V = 180$ lb.

2.29 $T_{AB} = 102$ lb; $T_{AC} = 74.8$ lb; $F_V = 204$ lb.

2.30 $T_{AB} = 126$ lb; $T_{AC} = 92.4$ lb; $T_{AD} = 117.6$ lb.

2.31 $T_{AC} = 60$ N; $T_{AD} = 103.93$ N; $R_T = 227.15$ N.

2.32 $T_{AC} = 103.93$ N; $T_{AD} = 60$ N; $R_T = 227.15$ N.

2.33 $T_{AC} = 120$ N; $T_{AD} = 120$ N; $R_T = 288$ N.

2.34 $T_{AC} = 128.33$ lb; $T_{AD} = 151.31$ lb; $R_V = 346.11$ lb.

2.35 $T_{AB} = 104$ lb; $T_{AC} = 111.23$ lb; $T_{AD} = 131.15$ lb.

2.36 $T_{AB} = 130.92$ lb; $T_{AD} = 165.07$ lb; $R_V = 377.58$ lb.

2.37 $T_{AB} = 126.9$ lb; $T_{AC} = 135.7$ lb; $R_V = 366$ lb.

2.38 $T_{AC} = 78.76$ N; $T_{AD} = 93.13$ N; $R_V = 163.95$ N.

2.39 $T_{AB} = 51.43$ N; $T_{AD} = 106.43$ N; $R_V = 187.36$ N.

2.40 $T_{AB} = 58$ N; $T_{AC} = 101.48$ N; $R_V = 211.25$ N.

2.41 $T_{AB} = 63.13$ N; $T_{AC} = 110.49$ N; $T_{AD} = 130.62$ N.

Capítulo 3

3.2 $\vec{\boldsymbol{M}}_C = 1\,280\boldsymbol{j} + 880\boldsymbol{k}$ [Nm].

3.3 $\vec{\boldsymbol{M}}_O = 36\boldsymbol{i} + 112\boldsymbol{j} + 232\boldsymbol{k}$ [Nm]

3.4 $\vec{\boldsymbol{M}}_O = 870\boldsymbol{i} - 480\boldsymbol{j} + 2\,400\boldsymbol{k}$ [Nm]; $M_{OB} = 114.78$ Nm.

3.5 $\vec{\boldsymbol{M}}_P = -420\boldsymbol{i} - 480\boldsymbol{j}$ [Nm].

3.6 $\vec{\boldsymbol{M}}_P = -360\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j} + 450\boldsymbol{k}$ [Nm].

3.9 (a) $\vec{\boldsymbol{F}} = -80\boldsymbol{i} + 110\boldsymbol{j} + 160\boldsymbol{k}$ [N]; $\vec{\boldsymbol{M}}_A = 1\,580\boldsymbol{i} - 160\boldsymbol{j} + 1\,450\boldsymbol{k}$ [Nm].

(b) $\vec{\boldsymbol{F}} = -80\boldsymbol{i} + 110\boldsymbol{j} + 160\boldsymbol{k}$ [N]; $\vec{\boldsymbol{M}}_B = -180\boldsymbol{i} + 320\boldsymbol{j} + 240\boldsymbol{k}$ [Nm].

3.10 (a) $\vec{\boldsymbol{F}} = -80\boldsymbol{i} + 110\boldsymbol{j} - 160\boldsymbol{k}$ [N]; $\vec{\boldsymbol{M}}_A = 180\boldsymbol{i} + 960\boldsymbol{j} + 1\,450\boldsymbol{k}$ [Nm].

(b) $\vec{\boldsymbol{F}} = -80\boldsymbol{i} + 110\boldsymbol{j} - 160\boldsymbol{k}$ [N]; $\vec{\boldsymbol{M}}_B = -1\,580\boldsymbol{i} - 2\,080\boldsymbol{j} + 240\boldsymbol{k}$ [Nm].

3.12 (a) $\vec{\boldsymbol{R}} = 140\boldsymbol{i} + 80\boldsymbol{j} + 20\boldsymbol{k}$ [lb]; $\vec{\boldsymbol{M}}_A = -180.52\boldsymbol{i} + 470\boldsymbol{j} + 4.16\boldsymbol{k}$ [lb$p$].

(b) $\vec{\boldsymbol{R}} = 140\boldsymbol{i} + 80\boldsymbol{j} + 20\boldsymbol{k}$ [lb]; $\vec{\boldsymbol{M}}_B = -1\,060.45\,\boldsymbol{i} + 2\,370\,\boldsymbol{j} - 1\,435.81\,\boldsymbol{k}$ [lb$p$].

3.13 (a) $\vec{\boldsymbol{R}} = -26.58\boldsymbol{i} + 195.89\boldsymbol{j} - 36.95\boldsymbol{k}$ [lb]; $\vec{\boldsymbol{M}}_A = 1\,123.72\boldsymbol{i} + 397.37\boldsymbol{j}$.
$+ 1\,298.39\boldsymbol{k}$ [lb$p$].

(b) $\vec{\boldsymbol{R}} = -26.58\boldsymbol{i} + 195.89\boldsymbol{j} - 36.95\boldsymbol{k}$ [lb]; $\vec{\boldsymbol{M}}_B = -2\,010.52\boldsymbol{i}$.
$-582.12\boldsymbol{j} - 1\,639.96\boldsymbol{k}$ [lb$p$].

3.15 $\vec{\boldsymbol{R}} = -100\boldsymbol{i} - 167\boldsymbol{j}$ [N]; $\vec{\boldsymbol{M}}_R = -501\boldsymbol{k}$ [Nm]; $x = 3$ m.

3.16 $\vec{\boldsymbol{R}} = -100\boldsymbol{i} - 167\boldsymbol{j}$ [N]; $\vec{\boldsymbol{M}}_R = -501\boldsymbol{k}$ [Nm]; $x = 3$ m.

3.17 $\vec{\boldsymbol{R}} = 100\boldsymbol{i} - 167\boldsymbol{j}$ [N]; $\vec{\boldsymbol{M}}_R = -1\,002\boldsymbol{k}$ [Nm]; $x = 6$ m.

3.18 $\vec{\boldsymbol{R}} = -100\boldsymbol{i} + 133\boldsymbol{j}$ [N]; $\vec{\boldsymbol{M}}_R = -532\boldsymbol{k}$ [Nm]; $x = -4$ m.

3.19 $\vec{\boldsymbol{F}} = 250\boldsymbol{i} - 150\boldsymbol{j}$ [N]; $x = 7$ m.

3.20 $\vec{\boldsymbol{F}} = 250\boldsymbol{i} - 150\boldsymbol{j}$ [N]; $x = 6$ m.

3.21 $W = 150$ lb; $x = 7.73$ p; $z = 6.53$ p.

3.22 $x = 7\,p$; $z = 4.85$ p.

Capítulo 4

4.1 $\vec{\boldsymbol{A}}_x = 360$ N ←; $\vec{\boldsymbol{A}}_y = 580$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{M}}_A = 2\,120$ Nm ↶.

4.2 $\vec{\boldsymbol{A}}_x = 300$ N ←; $\vec{\boldsymbol{A}}_y = 250$ N ↓; $\vec{\boldsymbol{M}}_A = 1\,000$ Nm ↷.

4.3 $\vec{\boldsymbol{A}}_x = 360$ N →; $\vec{\boldsymbol{A}}_y = 132$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{D}} = 348$ N ↑.

4.4 $\vec{\boldsymbol{A}}_x = 300$ N →; $\vec{\boldsymbol{A}}_y = 100$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{C}} = 450$ N ↑.

4.5 $\vec{\boldsymbol{A}}_x = 184.6$ N ←; $\vec{\boldsymbol{A}}_y = 200$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{D}} = 230.9$ N ↖.

4.6 $\vec{\boldsymbol{A}}_x = 130.7$ N →; $\vec{\boldsymbol{A}}_y = 270$ N ↓; $\vec{\boldsymbol{C}} = 981.5$ N ↖.

4.7 $\vec{\boldsymbol{A}}_x = 120$ N →; $\vec{\boldsymbol{A}}_y = 40$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{T}} = 144.22$ N ↖.

4.8 $\vec{\boldsymbol{A}}_x = 75$ N →; $\vec{\boldsymbol{A}}_y = 40$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{B}}_x = 75$ N ←; $\vec{\boldsymbol{B}}_y = 60$ N ↑.

4.9 $\vec{A}_x = 30$ N ←; $\vec{A}_y = 147.5$ N ↑; $\vec{E} = 222.5$ N ↑.

4.10 $\vec{A}_x = 50$ N →; $\vec{A}_y = 216.25$ N ↑; $\vec{E} = 153.75$ N ↑.

4.11 $\vec{A}_x = 937.5$ N ←; $\vec{A}_y = 450$ N ↑; $\vec{B} = 937.5$ N →.

4.12 $\vec{A}_x = 600$ N ←; $\vec{A}_y = 450$ N ↑; $\vec{B} = 600$ N →.

4.13 $\vec{A} = 300$ N ↑; $\vec{A}_x = 0$; $\vec{A}_y = 250$ N ↑.

4.14 $\vec{A} = 300$ N ↑; $\vec{F}_x = 60$ ←; $\vec{F}_y = 250$ N ↑.

4.15 $\vec{P} = 347.7$ lb ↓; $\vec{A}_x = 115.9$ lb →; $\vec{A}_y = 316.6$ lb ↑.

4.16 (a) $\vec{A}_x = 25.1$ lb →; $\vec{A}_y = 100.9$ lb ↓; $\vec{D} = 57.7$ lb ↘. (b) $\vec{A}_x = 56.3$ lb →; $\vec{A}_y = 68.1$ lb ↓; $\vec{D} = 21.5$ lb ↘. (c) $\vec{P} = 95.8$ lb ↓; $\vec{A}_x = 75$ lb →; $\vec{A}_y = 34$ lb ↓.

Capítulo 5

5.1 $\vec{A}_x = 200$ N ←; $\vec{A}_y = 150$ N ↑; $\vec{B} = 200$ N →; $F_{AB} = 150$ N (T); $F_{AC} = 200$ N (T); $F_{BC} = 250$ N (C).

5.2 $\vec{A}_x = 0$; $\vec{A}_y = 100$ N ↑; $\vec{B} = 100$ N ↑; $F_{AD} = F_{BD} = 160$ N (C); $F_{AC} = F_{BC} = 125$ N (T); $F_{CD} = 200$ N (T).

5.3 $\vec{A}_x = 80$ N ←; $\vec{A}_y = 200$ N ↑; $\vec{B} = 80$ N →; $F_{AD} = 128$ N (T); $F_{AC} = 100$ N (T); $F_{BC} = 100$ N (T); $F_{CD} = 0$; $F_{BD} = 128$ N (C).

5.4 $\vec{A}_x = 0$; $\vec{A}_y = 150$ N ↑; $\vec{E} = 250$ N ↑; $F_{BD} = 187.5$ N (C); $F_{BC} = 125$ N (T); $F_{AC} = 112.5$ N (T).

5.5 $\vec{A}_x = 0$; $\vec{A}_y = 200$ N ↑; $\vec{E} = 250$ N ↑; $F_{BD} = 187.5$ N (C); $F_{BC} = 62.5$ N (T); $F_{AC} = 150$ N (T).

5.6 $F_{BC} = 25$ N (T); $F_{CD} = 25$ N(C); $F_{DE} = 25$ N (C); $F_{EF} = 25$ N (T).

5.7 $F_{BC} = 50$ N (T); $F_{CD} = 50$ N(C); $F_{DE} = 0$; $F_{EF} = 75$ N (T).

5.8 $\vec{A}_y = 300$ N ↑; $\vec{F}_x = 0$; $\vec{F}_y = 250$ N ↑; $F_{BD} = 200$ N (C); $F_{CD} = 60$ N (T); $F_{CE} = 166.67$ N (T).

5.9 $\vec{A}_y = 300$ N ↑; $\vec{F}_x = 60$ N ←; $\vec{F}_y = 250$ N ↑; $F_{BD} = 260$ N (C); $F_{CD} = 60$ N (T); $F_{CE} = 166.67$ N (T).

5.10 $\vec{A}_y = 325$ N ↑; $\vec{F}_x = 50$ N ←; $\vec{F}_y = 225$ N ↑; $F_{BD} = 216.67$ N (C); $F_{CD} = 30$ N (T); $F_{CE} = 150$ N (T).

5.11 $\vec{A}_y = 325$ N ↑; $\vec{F}_x = 110$ N ←; $\vec{F}_y = 225$ N ↑; $F_{BD} = 276.67$ N (C); $F_{CD} = 30$ N (T); $F_{CE} = 150$ N (T).

5.12 $\vec{A}_x = 0$; $\vec{A}_y = 225$ N ↑; $\vec{G} = 275$ N ↑; $F_{DE} = 412.5$ N (C); $F_{DK} = 31.25$ N (C); $F_{JK} = 431.25$ N (T).

5.13 $\vec{A}_x = 0$; $\vec{A}_y = 400$ N ↑; $\vec{G} = 300$ N ↑; $F_{CD} = 375$ N (C); $F_{ID} = 125$ N (C); $F_{IJ} = 450$ N (T).

5.14 $\vec{A}_x = 1\,275$ N →; $\vec{B}_x = 1\,275$ N ←; $\vec{B}_y = 450$ N ↑; $F_{FH} = 262.5$ N (T); $F_{FG} = 562.5$ N (T); $F_{EG} = 600$ N (C).

5.15 $\vec{A}_x = 937.5$ N →; $\vec{B}_x = 937.5$ N ←; $\vec{B}_y = 450$ N ↑; $F_{DF} = 600$ N (T); $F_{EF} = 562.5$ N (C); $\boldsymbol{E}_{EG} = 262.5$ N (C).

5.16 $\vec{A}_x = 60$ ←; $\vec{A}_y = 170$ N ↑; $\vec{E} = 220$ N ↑; $F_{BC} = 269$ N (C); $F_{FC} = 157$ N (T); $F_{FG} = 160$ N (T).

5.17 $\vec{A}_x = 60$ ←; $\vec{A}_y = 180$ N ↑; $\vec{E} = 240$ N ↑; $F_{CD} = 300$ N (C); $F_{CH} = 128$ N (T); $F_{GH} = 135$ N (T).

5.18 $\vec{A}_x = 50$ N ←; $\vec{A}_y = 220$ N ↑; $\vec{E} = 260$ N ↑; $F_{BC} = 219$ N (C); $F_{BG} = 120$ N (C); $F_{FG} = 270$ N (T); $F_{CG} = 160$ N (T).

5.19 $\vec{A}_x = 80$ N ←; $\vec{A}_y = 200$ N ↑; $\vec{E} = 280$ N ↑; $F_{CD} = 256$ N (C); $F_{GD} = 94$ N (C); $F_{GH} = 210$ N (T); $F_{CG} = 177$ N (T).

5.20 $\vec{A}_x = 50$ N ←; $\vec{A}_y = 140$ N ↑; $\vec{E} = 180$ N ↑; $F_{BC} = 184$ N (C); $F_{FC} = 95$ N (T); $F_{FG} = 130$ N (T).

5.21 $\vec{A}_x = 60$ N ←; $\vec{A}_y = 170$ N ↑; $\vec{E} = 220$ N ↑; $F_{CD} = 269$ N (C); $F_{CG} = 95$ N (T); $F_{FG} = 160$ N (T).

5.22 $\vec{A}_x = 120$ N ←; $\vec{A}_y = 300$ N ↑; $\vec{J} = 400$ N ↑; $F_{CD} = 416$ N (C); $F_{FD} = 285$ N (T); $F_{FG} = 227$ N (T).

5.23 $\vec{A}_x = 120$ N $\leftarrow$; $\vec{A}_y = 310$ N $\uparrow$; $\vec{J} = 390$ N $\uparrow$; $F_{HI} = 552$ N (C); $F_{HK} = 112$ N (T); $F_{LK} = 340$ N (T).

5.24 $\vec{A}_x = 90$ N $\leftarrow$; $\vec{A}_y = 312.5$ N $\uparrow$; $\vec{J} = 387.5$ N $\uparrow$; $F_{BC} = 448$ N (C); $F_{EC} = 148$ N (T); $F_{EF} = 285$ N (T).

5.25 $\vec{A}_x = 120$ N $\leftarrow$; $\vec{A}_y = 390$ N $\uparrow$; $\vec{J} = 470$ N $\uparrow$; $F_{BC} = 474$ N (C); $F_{FC} = 95$ N (T); $F_{FG} = 415$ N (T).

5.26 $\vec{A}_x = 120$ N $\leftarrow$; $\vec{A}_y = 380$ N $\uparrow$; $\vec{J} = 480$ N $\uparrow$; $F_{HI} = 519$ N (C); $F_{LI} = 96$ N (C); $F_{LK} = 384$ N (T).

5.27 $\vec{A}_x = 90$ N $\leftarrow$; $\vec{A}_y = 392.5$ N $\uparrow$; $\vec{J} = 467.5$ N $\uparrow$; $F_{CD} = 346$ N (C); $F_{CG} = 224$ N (C); $F_{FG} = 329$ N (T).

5.28 $\vec{A}_x = 120$ N $\leftarrow$; $\vec{A}_y = 318$ N $\uparrow$; $\vec{J} = 382$ N $\uparrow$; $F_{CD} = 439$ N (C); $F_{FD} = 213$ N (T); $F_{FL} = 331$ N (T).

5.29 $\vec{A}_x = 120$ N $\leftarrow$; $\vec{A}_y = 310$ N $\uparrow$; $\vec{J} = 390$ N $\uparrow$; $F_{HI} = 528$ N (C); $F_{HK} = 90$ N (T); $F_{LK} = 340$ N (T).

5.30 $\vec{A}_x = 90$ N $\leftarrow$; $\vec{A}_y = 350$ N $\uparrow$; $\vec{J} = 390$ N $\uparrow$; $F_{BC} = 625$ N (C); $F_{EC} = 136$ N (T); $F_{EF} = 510$ N (T).

Capítulo 6

6.1 $A = 216$ cm^2; $\bar{x} = 6$ cm; $\bar{y} = 9$ cm.

6.2 $A = 240$ cm^2; $\bar{x} = 11$ cm; $\bar{y} = 8.4$ cm.

6.3 $A = 240$ cm^2; $\bar{x} = 5.8$ cm; $\bar{y} = 12$ cm.

6.4 $A = 289.75$ cm^2; $\bar{x} = 6.78$ cm; $\bar{y} = 12$ cm.

6.5 $A = 341.26$ cm^2; $\bar{x} = 13$ cm; $\bar{y} = 8.38$ cm.

6.6 $A = 262.35$ cm^2; $\bar{x} = 6.47$ cm; $\bar{y} = 9.18$ cm.

6.7 $A = 92.73$ cm^2; $\bar{x} = 4.6$ cm; $\bar{y} = 4.6$ cm.

6.8 $A = 121.7$ cm^2; $\bar{x} = 5.64$ cm; $\bar{y} = 5.14$ cm.

6.9 $A = 196.3\ \text{cm}^2;\ \bar{x} = 7.4\ \text{cm};\ \bar{y} = 7.33\ \text{cm}.$

6.10 $A = 177.7\ \text{cm}^2;\ \bar{x} = 5.64\ \text{cm};\ \bar{y} = 8.17\ \text{cm}.$

6.11 $A = 128.27\ \text{cm}^2;\ \bar{x} = 6.35\ \text{cm};\ \bar{y} = 8.6\ \text{cm}.$

6.12 $A = 110.25\ \text{cm}^2;\ \bar{x} = 4.59\ \text{cm};\ \bar{y} = 6.73\ \text{cm}.$

6.13 $A = 139.7\ \text{cm}^2;\ \bar{x} = 6.13\ \text{cm};\ \bar{y} = 8.43\ \text{cm}.$

6.14 $A = 132.48\ \text{cm}^2;\ \bar{x} = 4.79\ \text{cm};\ \bar{y} = 9.08\ \text{cm}.$

6.15 $\boldsymbol{A}_x = 0;\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = 38.14\ \text{kN}\uparrow;\ \vec{\boldsymbol{B}} = 58.27\ \text{kN}\uparrow.$

6.16 $\boldsymbol{A}_x = 0;\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = 44.13\ \text{kN}\uparrow;\ \vec{\boldsymbol{B}} = 64.67\ \text{kN}\uparrow.$

6.17 $\boldsymbol{A}_x = 0;\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = 39.3\ \text{kN}\uparrow;\ \vec{\boldsymbol{B}} = 60.7\ \text{kN}\uparrow.$

6.18 $\boldsymbol{A}_x = 0;\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = 59.42\ \text{kN}\uparrow;\ \vec{\boldsymbol{B}} = 36.58\ \text{kN}\uparrow.$

6.19 $\boldsymbol{A}_x = 0;\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = 28.62\ \text{kN}\uparrow;\ \vec{\boldsymbol{B}} = 51.38\ \text{kN}\uparrow.$

6.20 $\boldsymbol{A}_x = 0;\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = 45\ \text{kN}\uparrow;\ \vec{\boldsymbol{M}}_A = 486\ \text{kNm}\ \circlearrowleft.$

6.21 $\boldsymbol{A}_x = 0;\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = 12\ \text{kN}\uparrow;\ \vec{\boldsymbol{M}}_A = 21\ \text{kNm}\ \circlearrowright.$

6.22 $\boldsymbol{A}_x = 0;\ \vec{\boldsymbol{A}}_y = 19.2\ \text{kN}\downarrow;\ \vec{\boldsymbol{M}}_A = 57.6\ \text{kNm}\ \circlearrowright.$

Capítulo 7

7.1 $I_{x'} = \left(\frac{4}{3}\right)a^4;\ I_x = \left(\frac{16}{3}\right)a^4.$

7.2 $I_{x'} = \left(\frac{\pi}{4}\right)a^4;\ I_x = \left(\frac{5\pi}{4}\right)a^4.$

7.3 $I_{x'} = \left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}\right)a^4;\ I_x = \left(\frac{16}{3} - \frac{5\pi}{4}\right)a^4.$

7.4 $I_{x'} = \left(\frac{1}{3}\right)a^4;\ I_x = \left(\frac{7}{3}\right)a^4.$

7.5 $I_{x'} = a^4;\ I_x = 3a^4.$

7.6 $I_{x'} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)a^4;\ I_x = \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{7}{3}\right)a^4.$

7.7 $\bar{x} = 9\ \text{cm};\ \bar{y} = 13\ \text{cm};\ I_{x'} = 19\,560\ \text{cm}^4;\ I_{y'} = 3\,984\ \text{cm}^4.$

7.8 $\bar{x} = 9\ \text{cm};\ \bar{y} = 7.5\ \text{cm};\ I_{x'} = 6\,396\ \text{cm}^4;\ I_{y'} = 2\,040\ \text{cm}^4.$

7.9 $\bar{x} = 9\ \text{cm};\ \bar{y} = 13\ \text{cm};\ I_{x'} = 21\,504\ \text{cm}^4;\ I_{y'} = 11\,136\ \text{cm}^4.$

7.10 $\bar{x} = 5.5\ \text{cm};\ \bar{y} = 7.5\ \text{cm};\ I_{x'} = 6\,396\ \text{cm}^4;\ I_{y'} = 3\,804\ \text{cm}^4.$

7.11 $\bar{x} = 6.67$ cm; $\bar{y} = 13$ cm; $I_{x'} = 19\,560$ cm^4; $I_{y'} = 6\,336$ cm^4.

7.12 $\bar{x} = 16$ cm; $\bar{y} = 13$ cm; $I_{x'} = 19\,560$cm^4; $I_{y'} = 11\,040$cm^4.

7.13 $\bar{x} = 21.9$ cm; $\bar{y} = 40.9$ cm; $I_{x'} = 3\,975\,863$ cm^4; $I_{y'} = 1\,419\,527$ cm^4.

7.14 $\bar{x} = 50$ cm; $\bar{y} = 59$ cm; $I_{x'} = 9\,457\,800$ cm^4; $I_{y'} = 2\,567\,730$ cm^4.

7.15 $\bar{x} = 23.8$ cm; $\bar{y} = 59$ cm; $I_{x'} = 6\,870\,894$ cm^4; $I_{y'} = 1\,446\,122$ cm^4.

7.16 $\bar{x} = 55$ cm; $\bar{y} = 40$ cm; $I_{x'} = 5\,126\,756$ cm^4; $I_{y'} = 1\,805\,457$ cm^4.

7.17 $I_x = 2\,562$ cm^4; $W_x = 320.25$ cm^3; $k_x = 6.27$ cm; $I_y = 1\,150$ cm^4;
$W_y = 191.67$ cm^3; $k_y = 4.2$ cm.
$I_x = 634.7$ cm^4; $W_x = 105.78$.

7.18 cm^3; $k_x = 3.98$ cm; $I_y = 1\,040.4$ cm^4;
$W_y = 148.57$cm^3; $k_y = 5.1$ cm.

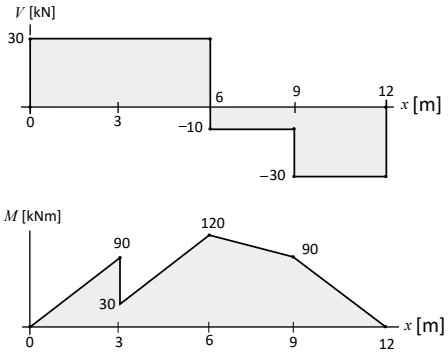
7.19 $I_x = 948.66$ cm^4; $W_x = 158.11$ cm^3; $k_x = 4.49$ cm; $I_y = 323.16$ cm^4;
$W_y = 64.63$ cm^3; $k_y = 2.8$ cm.

Capítulo 8

8.1 $\boldsymbol{A} = 25$ kN ↑; $\boldsymbol{C} = 50$ kN ↑; $V(x) = 25\langle x\rangle^0 - 60\langle x-3\rangle^0 + 50\langle x-6\rangle^0$ [kN]; $M(x) = 25\langle x\rangle^1 - 60\langle x-3\rangle^1 + 50\langle x-6\rangle^1$ [kNm]; Punto $A: x = 0, V = 25$ kN, $M = 0$; Punto $B: x = 3$ m, $V = -35$ kN, $M = 75$ kNm; Punto $C: x = 6$ m, $V = 15$ kN, $M = -30$ kNm; Punto $D: x = 8$ m, $V = 15$ kN, $M = 0$; $M_{máx} = 75$ kNm, $x = 3$ m.

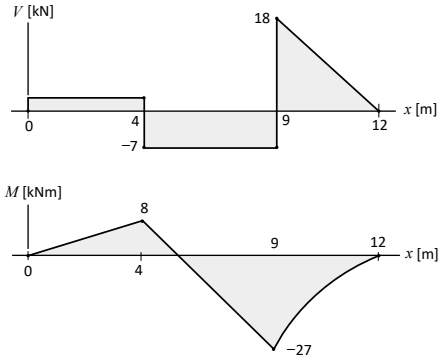
8.2 $\vec{\boldsymbol{A}} = 22.5$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{D}} = 37.5$ kN ↑; $V(x) = 22.5\langle x\rangle^0 - 60\langle x-6\rangle^0$ [kN]; $M(x) = 22.5\langle x\rangle^1 - 60\langle x-3\rangle^0 - 60\langle x-6\rangle^1$ [kNm]; Punto $A: x = 0, V = 22.5$ kN, $M = 0$; Punto $B: x = 3$ m, $V = 22.5$ kN, $M = 7.5$ kNm; Punto $C: x = 6$ m, $V = -37.5$ kN, $M = 75$ kNm; Punto $D: x = 8$ m $V, = -37\,5.$kN, $M = 0$; $M_{máx} = 75$ kNm, $x = 6$ m.

8.3 $\vec{\boldsymbol{A}} = 30$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{E}} = 30$ kN ↑; $V(x) = 30\langle x\rangle^0 - 40\langle x-6\rangle^0 - 20\langle x-9\rangle^0$ [kN]; $M(x) = 30\langle x\rangle^1 - 60\langle x-3\rangle^0 - 40\langle x-6\rangle^1 - 20\langle x-9\rangle^1$ [kNm].



Diagramas prob 8.3

8.4 $\vec{\boldsymbol{A}} = 2$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{C}} = 25$ kN ↑; $w(x) = 6\langle x-9\rangle^0$ [kN/m]; $V(x) = 2\langle x\rangle^0 - 9\langle x-4\rangle^0 + 25\langle x-9\rangle^0 - 6\langle x-9\rangle^1$ [kN]; $M(x) = 2\langle x\rangle^1 - 9\langle x-4\rangle^1 + 25\langle x-9\rangle^1 - 3\langle x-9\rangle^2$ [kNm].

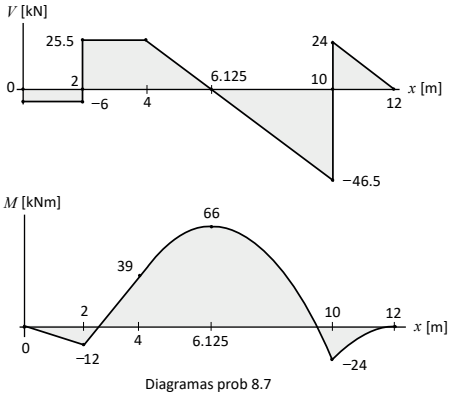


Diagramas prob 8.4

8.5 $\vec{\boldsymbol{A}} = 38.5$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{C}} = 21.5$ kN ↑; $w(x) = 18\langle x\rangle^0 - 18\langle x-3\rangle^0$ [kN/m];
$V(x) = 38.5\langle x\rangle^0 + 21.5\langle x-6\rangle^0 \quad -18\langle x\rangle^1 + 18\langle x-3\rangle^1$[kN];
$M(x) = 38.5\langle x\rangle^1 + 21.5\langle x-6\rangle^1 \quad -9\langle x\rangle^2 + 9\langle x-3\rangle^2$ [kNm];
Punto $A: x = 0, V = 38.5$ kN, $M = 0$; Punto $B: x = 3$ m, $V = -15.5$ kN, $M = 34.5$ kNm; Punto $C: x = 6$ m, $V = 6$ kN, $M = -12$ kNm; Punto $D: x = 8$ m, $V = 6$ kN, $M = 0$; $M_{\text{máx}} = 41.15$ kNm, $x = 2.14$ m.

8.6 $\vec{\boldsymbol{A}} = 17$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{C}} = 48$ kN ↑; $w(x) = 10\langle x-4\rangle^0 \ -10\langle x-10\rangle^0$ [kN/m];
$V(x) = 17\langle x\rangle^0 + 48\langle x-10\rangle^0 - \ 10\langle x-4\rangle^1 + 10\langle x-10\rangle^1$ [kN];
$M(x) = 17\langle x\rangle^1 + 48\langle x-10\rangle^1 \ - 5\langle x-4\rangle^2 + 5\langle x-10\rangle^2$ [kNm];
Punto $A: x = 0, V = 17$ kN, $M = 0$; Punto $B: x = 4$ m, $V = 17$ kN,
$M = 68$ kNm; Punto $C: x = 10$ m, $V = \ 5$ kN, $M = -10$ kNm; Punto
$D: x = 12$ m, $V = 5$ kN, $M = 0$; $M_{\text{máx}} = 82.45$ kNm, $x = 5.7$ m.

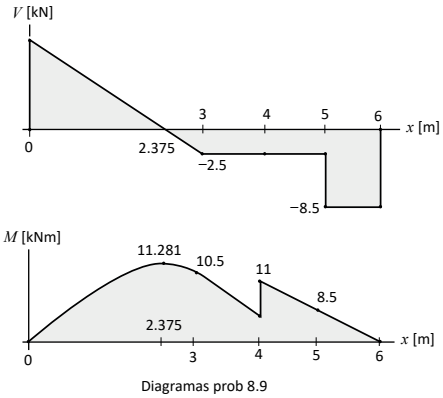
8.7 $\vec{\boldsymbol{B}} = 31.5$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{D}} = 70.5$ kN ↑; $w(x) = 12\langle x-4\rangle^0$ [kN/m];
$V(x) = -6\langle x\rangle^0 + 31.5\langle x-2\rangle^0 \ + 70.5\langle x-10\rangle^0 - 12(x-4)^1$ [kN]; $M(x) =$
$-6\langle x\rangle^1 + 31.5\langle x-2\rangle^1 + 70.5\langle x-10\rangle^1 - 6\langle x-4\rangle^2$ [kNm].



Diagramas prob 8.7

8.8 $\vec{\boldsymbol{A}} = 30$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{E}} = 36$ kN ↑; $w(x) = 10\langle x-4\rangle^0 \ -10\langle x-10\rangle^0$ [kN/m];
$V(x) = 30\langle x\rangle^0 - 6\langle x-2\rangle^0 \ -10\langle x-4\rangle^1 \quad +10\langle x-10\rangle^1$ [kN];
$M(x) = 30\langle x\rangle^1 - 6\langle x-2\rangle^1 - 5\langle x-4\rangle^2 \quad + 5\langle x-10\rangle^2$ [kNm];
Punto $A: x = 0, V = 30$ kN, $M = 0$; Punto $B: x = 2$ m, $V = 24$ kN,
$M = 60$ kNm; Punto $C: x = 4$ m, $V = \ 24$ kN, $M = 108$ kNm;
Punto $D: x = 10$ m, $V = -36$ kN, $M = 72$ kNm; Punto $E: x = 12$ m, $V =$
-36 kN, $M = 0$; $M_{\text{máx}} = 136.8$ kNm, $x = 6.4$ m.

8.9 $\vec{\boldsymbol{A}} = 9.5$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{E}} = 8.5$ kN ↑; $w(x) = 4\langle x\rangle^0 - 4\langle x-3\rangle^0$ [kN/m];
$V(x) = 9.5\langle x\rangle^0 - 6\langle x-5\rangle^0 - \ 4\langle x\rangle^1 + \ 4(x-3)^1$ [kN]; $M(x) = 9.5\langle x\rangle^1$
$- 6\langle x-5\rangle^1 - 2x^2 + 2\langle x-3\rangle^2 + 3\langle x-4\rangle^0$ [kNm].



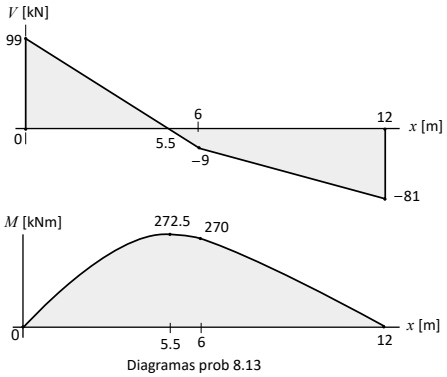
Diagramas prob 8.9

8.10 $\vec{\boldsymbol{A}} = 51$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{C}} = 99$ kN ↑; $w(x) = 18\langle x\rangle^0$ [kN/m]; $V(x) = 51\langle x\rangle^0 - 6\langle x-3\rangle^0 + 99\langle x-6\rangle^0 - 18\langle x\rangle^1$ [kN]; $M(x) = 51\langle x\rangle^1 - 6\langle x-3\rangle^1 + 99\langle x-6\rangle^1 - 9\langle x\rangle^2$[kNm]; Punto $A: x = 0, V = 51$ kN, $M = 0$; Punto $B: x = 3$ m, $V = -9$ kN, $M = 72$ kNm; Punto $C: x = 6$ m, $V = 36$ kN, $M = -36$ kNm; Punto $D: x = 8$ m, $V = 0, M = 0$; $M_{\text{máx}} = 72.25$ kNm, $x = 2.83$ m.

8.11 $\vec{\boldsymbol{A}} = 109.5$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{C}} = 112.5$ kN ↑; $w(x) = 18\langle x\rangle^0$ [kN/m]; $V(x) = 109.5\langle x\rangle^0 - 6\langle x-9\rangle^0 - 18\langle x\rangle^1$ [kN] $M(x) = 109.5\langle x\rangle^1 - 6\langle x-9\rangle^1 - 9\langle x\rangle^2$[kNm]; Punto $A: x = 0, V = 109.5$ kN, $M = 0$; Punto $B: x = 9$ m, $V = -58.5$ kN, $M = 256.5$ kNm; Punto $C: x = 12$ m, $V = -112.5$ kN, $M = 0$; $M_{\text{máx}} = 333$ kNm, $x = 6.08$ m.

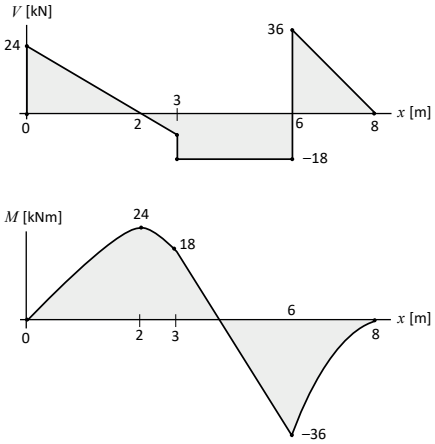
8.12 $\vec{\boldsymbol{B}} = 31$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{D}} = 17$ kN ↑; $w(x) = 6\langle x-3\rangle^0 - 6\langle x-6\rangle^0 + 4\langle x-6\rangle^0$ [kN/m]; $V(x) = -6\langle x\rangle^0 + 31\langle x-3\rangle^0 - 6\langle x-3\rangle^1 + 6\langle x-6\rangle^1 - 4\langle x-6\rangle^1$ [kN]; $M(x) = -6\langle x\rangle^1 + 31\langle x-3\rangle^1 - 3\langle x-3\rangle^2 + 3\langle x-6\rangle^2 - 2\langle x-6\rangle^2$[kNm]; Punto $A: x = 0, V = -6$ kN, $M = 0$; Punto $B: x = 3$ m, $V = 25$ kN, $M = -18$ kNm; Punto $C: x = 6$ m, $V = 7$ kN, $M = 30$ kNm; Punto $D: x = 12$ m, $V = -17$ kN, $M = 0$; $M_{\text{máx}} = 36.125$ kNm. $x = 7.75$ m.

8.13 $\vec{\boldsymbol{A}} = 99$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{C}} = 81$ kN ↑; $w(x) = 18\langle x\rangle^0 - 18\langle x-6\rangle^0 + 12\langle x-6\rangle^0$ [kN/m]; $V(x) = 99\langle x\rangle^0 - 18\langle x\rangle^1 + 18\langle x-6\rangle^1 - 12\langle x-6\rangle^1$ [kN]; $M(x) = 99\langle x\rangle^1 - 9\langle x\rangle^2 + 9\langle x-6\rangle^2 - 6\langle x-6\rangle^2$ [kNm].



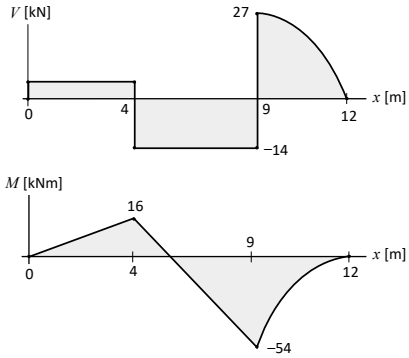
Diagramas prob 8.13

8.14 $\vec{\boldsymbol{A}} = 24\ \text{kN}\uparrow$; $\vec{\boldsymbol{C}} = 54\ \text{kN}\uparrow$; $w(x) = 12\langle x\rangle^0 - 12\langle x-3\rangle^0 + 18\langle x-6\rangle^0\ [\text{kN/m}]$; $V(x) = 24\langle x\rangle^0 - 6\langle x-3\rangle^0 + 54\langle x-6\rangle^0 - 12\langle x\rangle^1 + 12\langle x-3\rangle^1 - 18\langle x-6\rangle^1 [\text{kN}]$; $M(x) = 24\langle x\rangle^1 - 6\langle x-3\rangle^1 + 54\langle x-6\rangle^1 - 6\langle x\rangle^2 + 6\langle x-3\rangle^2 - 9\langle x-6\rangle^2\ [\text{kNm}]$.



Diagramas prob 8.14

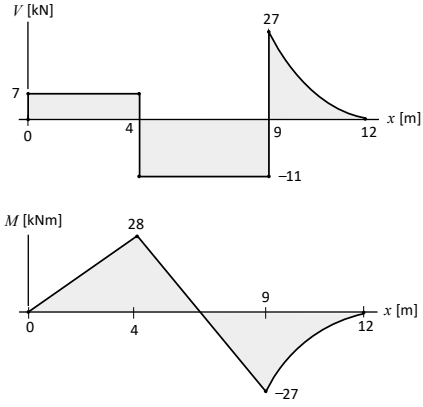
8.15 $\vec{\boldsymbol{A}} = 4\ \text{kN}\uparrow$; $\vec{\boldsymbol{C}} = 41\ \text{kN}\uparrow$; $w(x) = 6\langle x-9\rangle^1\ [\text{kN/m}]$; $V(x) = 4\langle x\rangle^0 - 18\langle x-4\rangle^0 + 41\langle x-9\rangle^0 - 3\langle x-9\rangle^2 [\text{kN}]$; $M(x) = 4\langle x\rangle^1 - 18\langle x-4\rangle^1 + 41\langle x-9\rangle^1 - \langle x-9\rangle^3\ [\text{kNm}]$.



Diagramas prob 8.15

8.16 $\vec{\boldsymbol{A}} = 28\text{ kN}\uparrow$; $\vec{\boldsymbol{D}} = 68\text{ kN}\uparrow$; $w(x) = 3\langle x-4\rangle^1 - 3\langle x-8\rangle^1$ [kN/m] $V(x) = 28\langle x\rangle^0 - 1.5\langle x-4\rangle^2 + 1.5\langle x-8\rangle^2$ [kN]; $M(x) = 28\langle x\rangle^1 - 0.5(x-4)^3 + 0.5\langle x-8\rangle^3$ [kNm]; Punto A: $x = 0, V = 28$ kN, $M = 0$; Punto B: $x = 4$ m, $V = 28$ kN, $M = 112$ kNm; Punto C: $x = 8$ m, $V = 4$ kN, $M = 192$ kNm; Punto D: $x = 14$ m, $V = -68$ kN, $M = 0$; $M_{\text{máx}} = 192.67$ kNm, $x = 8.33$ m.

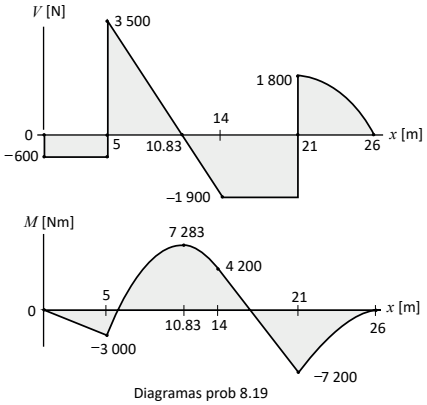
8.17 $\vec{\boldsymbol{A}} = 7\text{ kN}\uparrow$; $\vec{\boldsymbol{C}} = 38\text{ kN}\uparrow$; $w(x) = 18\langle x-9\rangle^0 - 6\langle x-9\rangle^1$ [kN/m]; $V(x) = 7\langle x\rangle^0 - 18\langle x-4\rangle^0 + 38\langle x-9\rangle^0 - 18\langle x-9\rangle^1 + 3\langle x-9\rangle^2$ [kN]; $M(x) = 7\langle x\rangle^1 - 18\langle x-4\rangle^1 + 38\langle x-9\rangle^1 - 9\langle x-9\rangle^2 + \langle x-9\rangle^3$ [kNm].



Diagramas prob 8.17

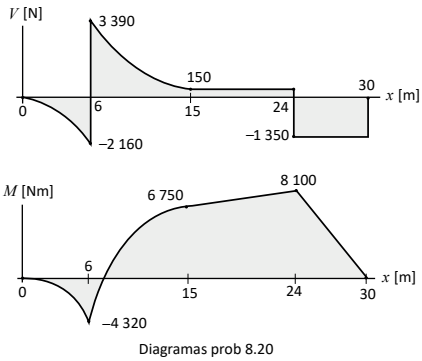
8.18 $\vec{\boldsymbol{A}} = 39$ kN ↑; $\vec{\boldsymbol{D}} = 51$ kN ↑; $w(x) = 12\langle x-3\rangle^0 - 4\langle x-9\rangle^1$ [kN/m]; $V(x) = 39\langle x\rangle^0 - 12\langle x-3\rangle^1 - 2\langle x-9\rangle^2$ [kN]; $M(x) = 39\langle x\rangle^1 - 6\langle x-3\rangle^2 - 0.67\langle x-9\rangle^3$ [kNm]; Punto A: $x = 0, V = 39$ kN, $M = 0$; Punto B: $x = 3$ m, $V = 39$ kN, $M = 117$ kNm; Punto C: $x = 9$ m, $V = -33$ kN, $M = 135$ kNm; Punto D: $x = 12$ m, $V = -51$ kN, $M = 0$; $M_{máx} = 180.375$ kNm, $x = 6.25$ m.

8.19 $\vec{\boldsymbol{A}} = 4\,100$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{D}} = 3\,700$ N ↑; $w(x) = 600\langle x-5\rangle^0 - 600\langle x-14\rangle^0 + 100(x-20)^1$ [N/m]; $V(x) = -600\langle x\rangle^0 + 4\,100\langle x-5\rangle^0 + 3\,700\langle x-20\rangle^0 - 600\langle x-5\rangle^1 + 600\langle x-14\rangle^1 - 50\langle x-20\rangle^2$ [N]; $M(x) = -600\langle x\rangle^1 + 4\,100\langle x-5\rangle^1 + 3\,700\langle x-20\rangle^1 - 300\langle x-5\rangle^2 + 300\langle x-14\rangle^2 - \frac{50}{3}\langle x-20\rangle^3$ [Nm].



Diagramas prob 8.19

8.20 $\vec{\boldsymbol{B}} = 5\,550$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{E}} = 1\,350$ N ↑; $w(x) = 120\langle x\rangle^1 - 120\langle x-6\rangle^1 - 80\langle x-6\rangle^1 + 80\langle x-15\rangle^1$ [N/m]; $V(x) = 5\,550\langle x-6\rangle^0 - 1\,500\langle x-24\rangle^0 - 60\langle x\rangle^2 + 60\langle x-6\rangle^2 + 40\langle x-6\rangle^2 - 40\langle x-15\rangle^2$ [N]; $M(x) = 5\,550\langle x-6\rangle^1 - 1\,500\langle x-24\rangle^1 - 20\langle x\rangle^3 + 20\langle x-6\rangle^3 + \frac{40}{3}\langle x-6\rangle^3 - \frac{40}{3}\langle x-15\rangle^3$ [Nm].



Diagramas prob 8.20

8.21 $\vec{\boldsymbol{B}} = 3\,600$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{E}} = 4\,050$ N ↑; $w(x) = 600\langle x-11\rangle^0 - 100(x-20)^1$ [N/m]; $V(x) = -450\langle x\rangle^0 + 3\,600\langle x-5\rangle^0 - 600(x-11)^1 + 50\langle x-20\rangle^2$ [N]; $M(x) = -450\langle x\rangle^1 + 3\,600\langle x-5\rangle^1 - 300\langle x-11\rangle^2 + \frac{50}{3}\langle x-20\rangle^3$ [Nm]; Punto $A: x = 0, V = -450$ N, $M = 0$; Punto $B: x = 5$ m, $V = 3\,150$ N, $M = -2\,250$ Nm; Punto $C: x = 11$ m, $V = 3\,150$ N, $M = 16\,650$ Nm; Punto $D: x = 20$ m, $V = -2\,250$ N, $M = 20\,700$ Nm; Punto $E: x = 26$ m, $V = -4\,050$ N, $M = 0$; $M_{\text{máx}} = 24\,918$ Nm, $x = 16.25$ m.

8.22 $\vec{\boldsymbol{A}} = 1\,220$ N ↑; $\vec{\boldsymbol{D}} = 7\,240$ N ↑; $w(x) = 80\langle x-5\rangle^1 - 80\langle x-14\rangle^1 - 120\langle x-18\rangle^1 + 120\langle x-24\rangle^1$ [N/m]; $V(x) = 1\,220\langle x\rangle^0 + 7\,240\langle x-18\rangle^0 - 40\langle x-5\rangle^2 + 40\langle x-14\rangle^2 + 60\langle x-18\rangle^2 - 60\langle x-24\rangle^2$ [N]; $M(x) = 1\,220\langle x\rangle^1 + 7\,240\langle x-18\rangle^1 - \frac{40}{3}\langle x-5\rangle^3 + \frac{40}{3}(x-14)^3 + 20\langle x-18\rangle^3 - 20\langle x-24\rangle^3$ [Nm]; Punto $A: x = 0, V = 1\,220$ N, $M = 0$; Punto $B: x = 5$ m, $V = 1\,220$ N, $M = 6\,100$ Nm; Punto $C: x = 14$ m, $V = -2\,020$ N, $M = 7\,360$ Nm; Punto $D: x = 18$ m, $V = 2\,340$ N, $M = -6\,480$ Nm; Punto $E: x = 24$ m, $V = 180$ N, $M = -1\,080$ Nm; Punto $F: x = 30$ m, $V = 180$ N, $M = 0$; $M_{\text{máx}} = 10\,592$ Nm, $x = 10.52$ m.

Capítulo 9

9.1 $P = 168.8$ N.

9.2 $(a)\ \alpha = 30.96°$. $(b)\ \vec{\boldsymbol{F}} = 41.2$ lb ↗.

9.3 $(a)\ \vec{\boldsymbol{F}}_S = 29$ N ↘. $(b)\ \vec{\boldsymbol{F}}_S = 31$ N ↖.

9.4 $(a)\ P = 419.8$ N. $(b)\ P = 198.8$ N. $(c)\ P = 319.25$ N.

9.5 $P = 300$ lb.

9.6 $P = 130.23$ lb.

9.7 $(a)\ \vec{\boldsymbol{F}}_S = 29.4$ lb →. $(b)\ \vec{\boldsymbol{F}}_S = 25$ lb ←. $(c)\ \vec{\boldsymbol{F}}_K = 22.17$ lb ←.

9.8 $(a)\ \vec{\boldsymbol{F}}_S = 39.7$ N ↖. $(b)\ \vec{\boldsymbol{F}}_K = 45.9$ N ↖. $(c)\ \vec{\boldsymbol{F}}_S = 46.89$ N ↘.

9.9 $\alpha = 51.34°$.

9.10 $u_S = 0.5$.

9.11 $P = 11.75$ lb.

9.12 $\alpha = 59.28°$.

9.13 $u_S = 0.572$.

9.14 $P = 313.51$ N.

9.15 $(a)\ \vec{\boldsymbol{F}}_K = 150$ N $\leftarrow$. (b) La caja no se voltea.

9.16 $(a)\ P = 240$ N. $(b)\ h = 75$ cm.

Bibliografía

Bedford, Anthony y Wallace Fowler. (2008). *Mecánica para ingeniería. Estática*. 5.ª ed. Ciudad de México: Pearson Educación.

Beer, Ferdinand P., E. Russell Johnston, David F. Mazurek y Elliot R. Eisenberg. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*. 9.ª ed. Ciudad de México: McGraw-Hill.

Berrocal, Luis Ortiz. (2007). *Resistencia de materiales*. 3.ª ed. Madrid: McGraw-Hill.

Castillo H., William P. y Oscar G. Toapanta C. (2019). *Principios de tribología aplicados en la ingeniería*. Alcoy, Alicante: Área de Innovación y Desarrollo.

Gere, James M. (2004). *Mechanics of Materials*. 7.ª ed. Belmont, CA: Thomson Learning.

Hibbeler, Russell C. (2014). *Ingeniería mecánica. Estática*. Ciudad de México: Pearson Educación.

Meriam, James L. y L. Glenn Kraige. (2012). *Engineering Mechanics. I: Statics*. 7.ª ed. Hoboken, NY: John Wiley & Sons.

Sears, Francis W., Mark W. Zemansky, Hugh D. Young y Roger A. Freedman. (2009). *Física universitaria*. Vol. 1. 12.ª ed. Ciudad de México: Pearson Educación.

El autor

José Manuel Arroyo Andrade

Ingeniero mecánico con especialización en Ciencias Electrónicas e Informática de la Universidad de Antioquia. Está vinculado desde hace más de cuarenta años a la docencia, inicialmente en la Universidad de la Guajira y en la actualidad en la Universidad de Sucre, y ha impartido, entre otras, las asignaturas Dibujo de Ingeniería, Estática, Resistencia de Materiales y Elementos de Máquinas.