Premessa

Nel I libro dell'*Eneide* di Virgilio si narra che alla regina fenicia Didone fu concesso di fondare la città di Cartagine su tanto terreno «quanto cerchiar di bue potesse un tergo», i.e. quanto ella potesse cingerne con un'unica pelle di un maschio adulto di vitello. In buona sostanza, Didone si trovò a risolvere un complesso *problema di ottimizzazione* di natura geometrica: determinare, fra tutte le figure piane di egual perimetro, quella avente massima superficie.

In un noto racconto favolistico d'origine persiana, lo squattrinato taglialegna Alì Babà, penetrato nella caverna segreta ove erano custoditi ori e tesori dei Quaranta Ladroni, si trovò a dover soffocare l'enorme meraviglia cagionata da cotal splendore e focalizzare attenzione su un articolato *problema di ottimizzazione* di natura combinatoria: scegliere quali oggetti preziosi riporre nel suo logoro zaino, dalla limitata capienza, sì da massimizzare il valore complessivo della refurtiva.

Più concretamente, il concetto di *ottimizzazione* permea di sé larga parte delle attività umane, giacché trova compiuta manifestazione nel perseguimento di una posizione di ottimo, ossia nel raggiungimento del miglior risultato ammissibile in relazione a un dato fine e nel rispetto di potenziali vincoli e requisiti. Esso, dunque, si mostra connaturato al processo di determinazione di scelte o soluzioni che contemplino il conciliamento tra esigenze divergenti, sovente legate ad un opportuno bilanciamento tra costi e benefici.

Il testo in esame intende fornire una rassegna puntuale dei principali metodi di ottimizzazione statica e dinamica e di alcune tra le numerose applicazioni nei campi dell'economia e della finanza, coniugando rigore analitico e logica formale. Il testo è organizzato in cinque capitoli, volti a introdurre il concetto di ottimizzazione e le sue declinazioni in seno alle discipline economico-finanziarie (capitolo 1), a richiamare alcune nozioni fondamentali di analisi matematica e algebra lineare (capitolo 2), a presentare e discutere i principali strumenti quantitativi di ottimizzazione statica (capitolo 3) e dinamica (capitolo 4). Il capitolo 5, infine, è dedicato alla presentazione di numerose applicazioni (in guisa di esercizi svolti e commentati) che contemplino l'uso di uno o più degli elementi di ottimizzazione trattati, con focus privilegiato sulla modellizzazione teorica di problemi classici dell'economia e della finanza.

I capitoli centrali del testo sono tutti corredati da una serie di **Osservazioni** e di **Esempi** numerici, che faciliteranno la comprensione della natura dei risultati enunciati – raccolti in apposite **Proposizioni** prive di dimostrazione formale e numerate progressivamente per capitolo – e del campo di applicazione degli strumenti presentati. Sia pure *self-contained*, il testo risulterà di più agevole lettura per coloro che posseggano già conoscenze di base di algebra lineare, di calcolo differenziale e integrale, e di analisi matematica. Il presente lavoro è invero concepito quale utile supporto per i corsi di matematica per l'economia, microeconomia e macroeconomia nei corsi di laurea magistrale, e può essere altresì impiegato per la preparazione da autodidatta a procedure concorsuali ove sia prevista una prova d'esame su siffatte discipline.

La stesura del presente testo non sarebbe stata possibile senza il supporto, in varia guisa, di numerosi amici e colleghi. Gli autori desiderano ringraziare, senza per questo stabilire alcun ordine di importanza, i professori Achille Basile, Maria Gabriella Graziano e Ciro Tarantino (Università degli Studi di Napoli Federico II), fonti cristalline e inesauribili di ispirazione; i professori Giuseppe De Marco e Mariafortuna Pietroluongo (Università degli Studi di Napoli "Parthenope"), per i saperi trasmessi e condivisi; la professoressa Elena L. Del Mercato (Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne), sprone al miglioramento continuo; il professore Marcello D'Amato (Università degli Studi di Napoli Suor Orsola Benincasa), per averci insegnato che l'intuizione economica e una lucida interpretazione del quadro d'insieme ("the *Big Picture*") sono complementi naturali del rigore formale. Chiaramente, ogni responsabilità per eventuali errori e/o omissioni è da attribuire esclusivamente agli autori.

Si ringrazia infine la tab edizioni, e in particolare la dottoressa Laura Moudarres, per le preziose indicazioni, l'incessante supporto, e il certosino lavoro editoriale, senza i quali il presente testo, semplicemente, non sarebbe tra le vostre mani.

Capitolo 1

Problemi di ottimizzazione in economia e finanza

L'economia è comunemente identificata come la branca delle scienze sociali che investiga i processi mediante i quali le risorse disponibili in dato contesto (nello spazio come nel tempo) vengono ripartite tra usi alternativi, in ragione di un determinato obiettivo da perseguire. Ne consegue che la ricerca (scelta) dell'alternativa migliore, secondo una ben definita metrica (distanza minima o massima rispetto a una qualche grandezza obiettivo), tra quelle accessibili (vincoli di disponibilità), è uno dei pilastri fondamentali sui quali poggia la disciplina economica.

Tale processo di ricerca esige una opportuna formalizzazione analitica, prima, e una serie di precipui strumenti metodologici, poi, atti a identificare l'*optimum* per la grandezza economico-finanziaria in esame. Posto che tal'ultima possa essere rappresentata, con buona dose di astrazione, da una certa funzione scalare reale f che soddisfi talune proprietà di regolarità, definite su una o più variabili x che popolano un certo insieme S e la cui selezione è tuttavia assoggettata ad una serie di restrizioni o vincoli V, la soluzione di un problema di ottimizzazione procederà dunque per gradi, ponendo (e fornendo risposta a) i seguenti quesiti: se l'ottimo, a seconda dei casi, è rappresentato dal minimo (o dal massimo) per f sulla restrizione V di S, sotto quali condizioni – su f come su S e V – tale minimo (o massimo) esiste? È la restrizione V un vincolo operativo per l'identificazione dell'ottimo, sia esso un minimo o un massimo? E quali le proprietà (e.g. carattere locale o globale, unicità) delle determinazioni x tali per cui f ammette valore minimo (o massimo)?

La natura di tali quesiti non muta se la grandezza di interesse è non già una funzione, bensì una collezione di funzioni ben definite, che si conformino a talaltre ipotesi di regolarità. Il problema di ottimizzazione a monte interesserà i consueti elementi caratterizzanti (variabili di scelta o controllo, variabili di stato, insieme ammissibile o vincoli). La definizione dell'oggetto del problema, e dunque la sua rappresentazione formale, saranno, ovvimente, diversamente modulati, e richiederanno strumenti di soluzione coerenti. Osserviamo a tal riguardo che la natura complessa e articolata della teoria dell'ottimizzazione dinamica non consente la trattazione di metodologie (e.g. programmazione dinamica classica, in tempo discreto e tempo continuo) e/o applicazioni in campo economico (e.g. modelli di controllo ottimo con vincoli di disuguglianza e/o a orizzonte infinito), ai quali riteniamo di non poter riservare spazio adeguato all'interno di un testo orientato all'introduzione elementare ai problemi di ottimizzazione che permeano la teoria dell'economia e della finanza.

A titolo illustrativo, e perché persuadano il lettore circa l'importanza del ruolo giocato dai metodi di ottimizzazione in seno alla modellizzazione di fenomeni economico-finanziari, consideriamo le seguenti esemplificazioni.

Esempio 1. In una economia uniperiodale, un consumatore è chiamato a scegliere, dato un numero finito n di beni perfettamente divisibili, il paniere (o collezione) degli stessi che (i) sia acquistabile dati i termini del sistema economico di riferimento, e che (ii) soddisfi le sue esigenze nel miglior modo possibile. Se indichiamo con p_i il prezzo di mercato per l'i-esimo bene, con $i = 1, \cdots, n$, con ω la dotazione (e.g. reddito) del consumatore, e se assumiamo esista una funzione f (la funzione di utilità) che rappresenti le preferenze di quest'ultimo in merito a panieri diversi, possiamo assegnare la seguente formulazione analitica al problema di scelta del consumatore:

$$\max_{x_1, \cdots x_n} f(x_1, \cdots, x_n) \quad \text{soggetto a} \quad x_i \geq 0 \ \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq \omega$$

Esempio 2. In una economia bi-periodale (tempo discreto), un consumatore è chiamato a scegliere il proprio profilo di consumo $\{c_0, c_1\}$ (i.e. consumo presente e consumo futuro) che massimizzi la sua funzione di utilità f, definita su ogni profilo di consumo non-negativo, in ragione delle proprie dotazioni periodali $\{\omega_0, \omega_1\}$ (presente e futura) e della possibilità di prestare o indebitarsi al tasso di interesse netto $r > 0$ su un mercato finanziario perfettamente concorrenziale. Se indichiamo con s_0 il risparmio (potenzialmente negativo) del consumatore al termine del primo periodo, possiamo dunque assegnare la seguente formulazione analitica al problema di scelta del consumatore:

$$\max_{c_0, c_1} f(c_0, c_1) \quad \text{soggetto a} \quad s_0 = \omega_0 - c_0, \quad c_1 \leq \omega_1 + (1+r)s_0, \quad c_0, c_1 \geq 0$$

Esempio 3. In una economia dinamica con tempo continuo a orizzonte finito, un'impresa è chiamata a onorare una commessa pari a $D > 0$ unità di bene prodotto, da consegnare in data $T > 0$; essa dovrà dunque scegliere il piano produttivo che minimizzi il costo complessivo di produzione, sapendo che il costo di produzione istantaneo (cioè, ad ogni tempo $t \in [0, T]$) è dato dalla somma di un costo quadratico effettivo $\dot{q}^2(t)$ e di un costo di stoccaggio $\alpha q(t)$, dove $q(t)$ è la quantità di merce prodotta per unità di tempo, $\dot{q}(t)$ la sua variazione marginale nel tempo, e $\alpha > 0$ un parametro tecnologico. Assumendo che al tempo $t = 0$ l'impresa abbia una certa disponibilità $0 \leq d < D$ di prodotto in magazzino, il problema di scelta dell'impresa ammette la seguente formulazione analitica:

$$\min_{\{q(t):\ t \in [0,T]\}} \int_0^T \left(\dot{q}^2(t) + \alpha q(t)\right) dt \quad \text{soggetto a} \quad q(0) = d, \;\; q(T) = D$$

Esempio 4. In una economia dinamica con tempo continuo a orizzonte finito, un consumatore che vive dal tempo $t = 0$ al tempo $t = T$ ha a disposizione all'istante iniziale una dotazione di bene di consumo $\underline{\omega} > 0$, da consumare interamente nel corso della sua vita. Il consumatore trae beneficio dal consumo secondo una funzione di utilità del tipo $f(c(t))$ e dunque il problema di scelta del consumatore ammette la seguente formulazione analitica:

$$\max_{\{c(t):\ t \in [0,T]\}} \int_0^T f(c(t))dt \quad \text{soggetto a} \quad \dot{\omega}(t) = -c(t), \;\; \omega(0) = \underline{\omega}, \;\; \omega(T) = 0$$

I capitoli seguenti presenteranno metodi e strumenti adatti alla comprensione e alla soluzione di questi, come di altri, problemi di ottimizzazione statica (capitolo 3) e dinamica (capitolo 4), che ricorrono con elevata frequenza nello studio dell'economia e della finanza teorica. La trattazione analitica è corredata da una serie di esempi atti a illustrare il contenuto applicativo dei risultati teorici.